

REKURSIVE BEZEICHNUNGSSYSTEME FÜR
ORDINALZAHLEN AUF DER GRUNDLAGE
DER FEFERMAN-ACZELSCHEN
NORMALFUNKTIONEN Θ_α

Wilfried Buchholz

1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554607_0022

REKURSIVE BEZEICHNUNGSSYSTEME FÜR ORDINALZAHLEN AUF DER
GRUNDLAGE DER FEFFERMAN-ACZELSCHEM NORMALFUNKTIONEN Θ_α

Inauguraldissertation zur Erlangung des
Doktorgrades der Fakultät für Mathematik
an der Ludwigs-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt von
Wilfried Buchholz
aus München
im Januar 1974

1. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Schütte

2. Berichterstatter: Doz. Dr. H. Osswald

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Februar 1974



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	I
§1. Die Normalfunktionen θ_α	1
§2. Eine rekursive Charakterisierung der Ordinalzahlenmenge $C(\Lambda_0, 0)$	11
§3. Das rekursive Bezeichnungssystem $\bar{\theta}(\{g\})$	21
§4. Vergleich der Ordinalzahlenmenge $C(\Omega_\omega, 0)$ mit den Bezeichnungssystemen $\Sigma(N)$, Σ von Schütte und Pfeiffer	28
Literaturverzeichnis	34
Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole	35

Einleitung

In Verallgemeinerung einer Idee von FEFERMAN beschreibt ACZEL in [1] eine Methode zur Definition von Normalfunktionen θ_α . Diese Methode lässt sich in wenigen Zeilen skizzieren:

In Abhängigkeit von einer vorgegebenen abzählbaren Menge $\mathcal{G}$ von Ordinalzahlfunktionen $f: \text{ON}^n \rightarrow K$ ($0 \leq n < \omega$, $K :=$ Klasse der Kardinalzahlen $> \omega^{(1)}$) werden die Normalfunktionen $\theta_\alpha^{\mathcal{G}}$ ($\alpha \in \text{ON}$) durch transfinite Induktion nach α wie folgt definiert:

$\theta_\alpha^{\mathcal{G}}$ sei die Ordnungsfunktion von $\{\beta \in \text{ON} \mid \beta \notin \text{Cl}_\alpha(\beta)\} \cup K =: \text{In}_\alpha$ (α -inaccessible ordinals), wobei $\text{Cl}_\alpha(\beta)$ den Abschluss (Closure) von $\{\eta \in \text{ON} \mid \eta < \beta\}$ bezüglich der Funktionen aus $\{\theta_\xi^{\mathcal{G}} \mid \xi < \alpha\} \cup \mathcal{G} \cup \{+\}$ bezeichnen soll.

In [1] wird der genaue Zusammenhang zwischen den - unter Benutzung von Hauptfolgen definierten - Bachmann-Funktionen aus [2a] und der Funktionenfolge $(\theta_\alpha^{\{\Omega_1\}})_{\alpha < \Omega_2}$ aufgezeigt; abschliessend werden dort zwei Vermutungen darüber aufgestellt, wie sich die (abzählbaren) Grenzzahlen der verallgemeinerten Bachmann-Systeme von PFEIFFER [7] und ISLES [4] mit Hilfe der θ -Funktionen darstellen lassen. Diese Vermutungen finden in der Dissertation von J. BRIDGE [3] ihre Bestätigung. J. BRIDGE kann in [3] sogar eine genaue Beziehung zwischen $(\theta_\alpha^{\{\mathcal{G}\}})_{\alpha \in \text{ON}}$ ²⁾ und dem Islesschen Funktionensystem aus [4] herstellen, derzufolge diese beiden Systeme im wesentlichen äquivalent sind. Die Feferman-Aczel-Methode eröffnet also eine gegenüber der Bachmannschen Hauptfolgenmethode wesentlich einfachere und anschaulichere Möglichkeit zur Definition von Hierarchien von Normalfunktionen, die zur Erfassung umfangreicher Abschnitte der zweiten Zahlenklasse geeignet sind.

Als Bestätigung und Ergänzung dieser - durch die Ergebnisse von J. BRIDGE gerechtfertigten - Feststellung soll in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden, dass die Feferman-Aczelschen θ -Funktionen eine ausgezeichnete Grundlage bieten für die Entwicklung weitreichender, formal einfacher und vom Standpunkt der klassischen Ordinalzahltheorie gut zu verstehender rekursiver Ordinalzahlbezeichnungssysteme. Dabei wird sich (z.B. in §2, Satz 4) ein überaus enger Zusammenhang mit den konstruktiv definierten

Bezeichnungssystemen $\Sigma(N)$, Σ , $W(X)$, $Wd(\{1\})$ von SCHÜTTE [14] und PFEIFFER [8], [9], [12] ergeben, den wir (bzgl. $\Sigma(N)$ und Σ) in §4 näher untersuchen werden. Dieser Zusammenhang kommt schon in SCHÜTTE [15] sehr deutlich zum Ausdruck, wo ein auf den θ -Funktionen basierendes Bezeichnungssystem eingeführt wird, dessen Definition allerdings nicht rekursiv ist.

Da es unseres Wissens bisher noch keine Publikation über die Funktionensysteme $(\theta_\alpha)_{\alpha \in ON}$ gibt, und da die vorliegende Arbeit von einer gegenüber [1], [3], [15] etwas veränderten Definition der θ_α ausgeht, wollten wir es vermeiden, im folgenden auf irgendwelche Ergebnisse aus [1], [3] oder [15] verweisen zu müssen; wir haben daher die in [3] und [15] bewiesenen Grundeigenschaften der θ -Funktionen, soweit sie hier benötigt werden, noch einmal samt Beweisen auf den Seiten 1 - 6 zusammengestellt.

Die hier in §1 (Seite 1) gegebene Definition der θ -Funktionen unterscheidet sich von der (anfangs beschriebenen) ursprünglichen Definition von FEFFERMAN und ACZEL [1] ausser in der Schreibweise (wir schreiben $\theta\alpha\beta$, $C(\alpha, \beta)$, $B(\alpha)$ statt $\theta_\alpha(\beta)$, $Cl_\alpha(\beta)$, In_α) vor allem durch die zusätzliche Bedingung $\xi \in C(\xi, \theta\xi\eta)$ in der Definitionsregel (C3). Wie aus [3], Theorem 1.15 bzw. aus §2, Satz 6 der vorliegenden Arbeit hervorgeht, sind diese beiden Definitionen jedoch äquivalent. Der - auf eine Idee von SCHÜTTE zurückgehende - Trick, die Bedingung $\xi \in C(\xi, \theta\xi\eta)$ in die Definition der $\theta\alpha$ aufzunehmen, bringt einem bei den Ausführungen in §2 gewisse beweistechnische Erleichterungen.

In §2 wird eine im Verhältnis zu [3] (Ch. 6, §§3, 4) relativ einfache rekursive Charakterisierung der Ordinalzahlenmenge $C(\Lambda_0, 0)^3$ und der zugehörigen Ordnungsrelation entwickelt. Ausschlaggebendes Hilfsmittel sind in diesem Zusammenhang die Ideen und Anregungen, die wir durch eine genaue Analyse des Beweises von Theorem 1.15 aus [3] gewinnen konnten. Die entscheidende Rolle, die dieser schwierige und trickreiche Beweis von J. BRIDGE bei der Entstehung der vorliegenden Arbeit gespielt hat, soll hier ausdrücklich betont werden. Andererseits wollen wir auch nicht verschweigen, dass uns die dortige Beweisführung nicht ganz einwandfrei und exakt zu sein scheint - wenn auch das erzielte Ergebnis richtig ist. - Die am Anfang von §2 eingeführten Koeffizienten-

mengen $K_{\vee}^* \alpha$ und $K_{\vee} \alpha$ und die anschliessenden Sätze 2 und 4 sind Verallgemeinerungen entsprechender Begriffe und Sätze in [15] .

In §3 führen wir ein rekursives Bezeichnungssystem $\bar{\Theta}(\{g\})$ für die Ordinalzahlenmenge $C(\Lambda_0, 0)$ ein, dessen Definition weniger kompliziert ist als die rekursive Charakterisierung in §2. Die Klammerterme (a_1, a_2) dieses Systems entsprechen zwar nicht genau den Ordinalzahlen $\Theta|a_1||a_2|$ ($|a_1|$ sei die durch den Term a_1 bezeichnete Ordinalzahl), doch ist der Zusammenhang mit den Funktionen $\Theta\alpha$ hier noch so eng, dass sich der Isomorphismus von $\bar{\Theta}(\{g\})$ auf $C(\Lambda_0, 0)$ mit Hilfe der $\Theta\alpha$ in einfacher und leicht überschaubarer Weise konstruktiv definieren lässt. Andererseits zeichnet sich das System $\bar{\Theta}(\{g\})$ durch besonders grosse Ähnlichkeit mit den Schütte-Pfeiffer-Systemen $\Sigma(N), \Sigma, \dots$ aus.

Sämtliche Definitionen und Sätze in §2 und §3 beziehen sich auf den Fall $\mathcal{G} = \{g\}$. Es ist leicht zu sehen, welche (geringfügigen) Modifikationen vorzunehmen sind, um entsprechende Ergebnisse auch für eine Reihe anderer Funktionenmengen $\mathcal{G}$ zu erhalten, wie z.B. $\{\Omega_\alpha \mid 0 < \alpha < \tau\}$ (mit $\tau < \Omega_1$) , $\{g0\}$ oder $\{g, \Delta\}$.

In §4 beweisen wir die Isomorphie der Bezeichnungssysteme $\bar{\Theta}(\omega) (:= \bar{\Theta}(\{\Omega_i \mid 0 < i < \omega\}))$ und Σ [8] durch Angabe je einer ordnungstreu abbildenden Abbildung von $\bar{\Theta}(\omega)$ in Σ und von Σ in $\bar{\Theta}(\omega)$. Daraus folgt dann sofort, dass Σ isomorph zur Ordinalzahlenmenge $C(\Omega_\omega, 0)$ ist und insbesondere dass der Abschnitt der Stufe 0 von Σ (= grösster wohlgeordneter Abschnitt von $\bigcup_{N < \omega} \Sigma(N)$) den Ordnungstyp $\Theta_{\omega} 0$ hat - ein Ergebnis, das allerdings auch schon aus [3]§3 zusammen mit [11] folgt; der hier durchgeführte direkte Vergleich scheint uns aber doch noch zusätzliche Informationen über den Zusammenhang zwischen den Normalfunktionen $\Theta\alpha$ und den Schütte-Pfeiffer-Systemen zu liefern. - Abschliessend sei hier noch ohne Beweis mitgeteilt, dass auch die Systeme $W(X)$ [9] und $\bar{\Theta}(\tau)$ isomorph sind, wobei τ den Ordnungstyp der wohlgeordneten Menge X bezeichne.

Fussnoten:

- 1) Wir setzen hier das Auswahlaxiom voraus, so dass die Begriffe "Kardinalzahl" und "ordinale Anfangszahl" zusammenfallen. Es ist also $K = \{\Omega_\alpha \mid 0 < \alpha \in ON\}$.
- 2) Definition der Normalfunktionen $g\alpha$ ($\alpha \in ON$) :
 $\text{ran}(g0) := K$, $\text{ran}(g\alpha) := \bigcap_{\xi < \alpha} \{\eta \mid g\xi\eta = \eta\}$ für $\alpha > 0$.

3) Λ ist die Ordnungsfunktion von $\{\xi \mid g\xi 0 = \xi\}$, also $\Lambda_0 = \min\{\xi \mid g\xi 0 = \xi\}$. $C(\Lambda_0, 0)$ (genauer $C^{[g]}(\Lambda_0, 0)$) ist gerade die Menge all derjenigen Ordinalzahlen, die sich ausgehend von der 0 durch (endlichfache) Anwendung der Funktionen $g, \theta^{[g]}, +$ erzeugen lassen (siehe Seite 11 ff); sie entspricht der Termmenge T_I aus [3], Ch.6.

Ich danke Herrn Prof.Dr.K.Schütte für die Anregung zu dieser Arbeit und das lebhafte persönliche Interesse mit dem er ihr Entstehen verfolgt hat. In zahlreichen, ausführlichen Gesprächen und Diskussionen konnte er mir manche wertvollen Hinweise und Ratschläge geben.

Technische Bemerkungen:

Die Arbeit ist in Paragraphen gegliedert. Die Lemmata und Sätze eines jeden Paragraphen sind fortlaufend nummeriert. Hinweise, die nur die fortlaufende Nummer tragen, beziehen sich jeweils auf den selben Paragraphen.

§1 Die Normalfunktionen θ_α

=====

Wir legen hier eine axiomatische Mengenlehre mit Auswahlaxiom zu Grunde, etwa $ZF + AC$.

ON sei die Klasse aller Ordinalzahlen. ON sei so definiert, dass für jedes $\alpha \in ON$ gilt: $\alpha = \{\xi \mid \xi \in ON \wedge \xi < \alpha\}$.

K sei die Klasse aller Kardinalzahlen $> \omega$.

$\alpha \mapsto \Omega_\alpha$ sei die Ordnungsfunktion von $K_0 := KU\{\omega\}$.

Für $\beta = \Omega_\alpha \in K_0$ sei $\beta^+ := \min\{\xi \mid \xi \in K \wedge \beta < \xi\} = \Omega_{\alpha+1}$.

Für $\alpha \in ON$ sei $S_\alpha := \min\{\xi \mid \xi \in K_0 \wedge \alpha < \xi^+\}$.

Es gilt also stets $S_\alpha \leq \alpha < (S_\alpha)^+$.

Die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \tau, \xi, \eta, \zeta$ (auch mit Indizes) bezeichnen im folgenden immer Ordinalzahlen.

$\mathcal{G}$ sei eine abzählbare Menge von Funktionen $f: ON^n \rightarrow K$, ($0 \leq n < \omega$). Die Ordinalzahlfunktionen θ_α werden in Abhängigkeit von dieser Menge $\mathcal{G}$ definiert.

Definition der Funktionen θ_α und der Ordinalzahlenmengen $C(\alpha, \beta)$

Die Definition erfolgt durch transfinite Induktion nach α .

Ist $C(\xi, \beta)$ und θ_ξ schon für alle $\xi < \alpha$ und alle β definiert, so wird zunächst für jedes β eine Menge $C(\alpha, \beta)$ durch die Regeln (C1) - (C4) induktiv definiert und anschliessend θ_α mit Hilfe der Mengen $C(\alpha, \beta)$ definiert.

$$(C1) \quad \gamma = 0 \vee (\gamma \text{ additive Hauptzahl} < \beta) \implies \gamma \in C(\alpha, \beta) .$$

$$(C2) \quad \gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n \text{ add. Hauptz. aus } C(\alpha, \beta) \implies \gamma_1 + \dots + \gamma_n \in C(\alpha, \beta) .$$

$$(C3) \quad \left. \begin{array}{l} \xi, \eta \in C(\alpha, \beta) \wedge \xi < \alpha \wedge \eta \in \text{dom } \theta_\xi \\ \xi \in C(\xi, \theta_\xi \eta) \wedge \eta < \theta_\xi \eta \end{array} \right\} \implies \theta_\xi \eta \in C(\alpha, \beta) .$$

$$(C4) \quad f \in \mathcal{G} \text{ n-stellig } (0 \leq n) \wedge \xi_1, \dots, \xi_n \in C(\alpha, \beta) \wedge \beta < f\xi_1 \dots \xi_n \wedge f\xi_1 \dots \xi_n \notin \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \implies f\xi_1 \dots \xi_n \in C(\alpha, \beta) .$$

$$(B) \quad B(\alpha) = \{\beta \in ON \mid \beta \notin C(\alpha, \beta)\} .$$

(e) θ_α sei die Ordnungsfunktion von $B(\alpha)$,

Folgerungen

$$(1) \quad \gamma < \beta \implies \gamma \in C(\alpha, \beta) .$$

$$(2) \quad \alpha_1 < \alpha_2 \implies C(\alpha_1, \beta) \subset C(\alpha_2, \beta) \wedge B(\alpha_2) \subset B(\alpha_1) .$$

- (3) $\beta_1 < \beta_2 \wedge \beta_2 \notin K \implies C(\alpha, \beta_1) \subset C(\alpha, \beta_2)$.
 (4) α Limeszahl $\implies C(\alpha, \beta) = \bigcup \{C(\xi, \beta) \mid \xi < \alpha\}$.
 (5) β Limeszahl $\implies C(\alpha, \beta) \subset \bigcup \{C(\alpha, \eta) \mid \eta < \beta\}$.

Lemma 1

Zu α, β existiert $\beta_1 := \min\{\xi \mid \xi \notin C(\alpha, \beta)\}$, und es gilt:
 $\beta \leq \beta_1 < (S\beta)^+ \wedge C(\alpha, \beta_1) = C(\alpha, \beta) \wedge \beta_1 \in B(\alpha)$.

Beweis:

Da $\mathcal{G}$ abzählbar ist, muss die Menge $C(\alpha, \beta)$ eine Mächtigkeit $\leq \omega + S\beta$ haben. Daher existiert ein $\xi \notin C(\alpha, \beta)$ mit $\xi < (S\beta)^+$. Also existiert $\beta_1 := \min\{\xi \mid \xi \notin C(\alpha, \beta)\}$ und es ist $\beta \leq \beta_1 < (S\beta)^+$. Durch Induktion nach den Definitionsregeln (C1) - (C4) (im folgenden kurz C-Induktion genannt) zeigt man $C(\alpha, \beta_1) \subset C(\alpha, \beta)$. Also ist $\beta_1 \notin C(\alpha, \beta_1)$ und folglich $\beta_1 \in B(\alpha)$. Aus $\beta \leq \beta_1 < (S\beta)^+$ folgt $C(\alpha, \beta) \subset C(\alpha, \beta_1)$.

Satz 1

- a) $\text{dom } \theta\alpha = \text{ON}$.
 b) $S\theta\alpha\beta = S\beta$.
 c) $\gamma \in C(\alpha, \beta) \implies S\gamma \in C(\alpha, \beta)$.
 d₁) $\beta \in K \implies \theta\alpha\beta = \beta$.
 d₂) $\beta \in K \iff \theta\alpha\beta \in K$.
 e) $C(\alpha, \theta\alpha 0) = C(\alpha, 0)$.
 f) $B(0)$ ist die Klasse der additiven Hauptzahlen, also ist für alle α, β $\theta\alpha\beta$ additive Hauptzahl und $\theta 0\beta = \omega^\beta$.
 g) $\alpha_1 < \alpha_2 \implies \theta\alpha_1\beta \leq \theta\alpha_2\beta \wedge C(\alpha_1, \theta\alpha_1\beta) \subset C(\alpha_2, \theta\alpha_2\beta)$.

Beweis:

- a) Nach L1 ist $B(\alpha)$ unbeschränkt, also $\text{dom } \theta\alpha = \text{ON}$.
 b) Es ist $S\beta \leq \beta \leq \theta\alpha\beta$. Bleibt zu zeigen $\theta\alpha\beta < (S\beta)^+$.
 Sei $\beta^* := \{\eta \mid \theta\alpha\eta < (S\beta)^+\}$ und $M := \{\xi \mid \xi \in B(\alpha) \wedge \xi < (S\beta)^+\}$.
 Es ist $M = \{\theta\alpha\eta \mid \eta < \beta^*\}$ und $\sup M = (S\beta)^+$ (letzteres nach L1).
 Da $(S\beta)^+$ regulär ist, muss $\beta^* = (S\beta)^+$ sein, also $\theta\alpha\beta < (S\beta)^+$.
 c) Beweis durch C-Induktion mit Hilfe von b).
 d₁) Beweis durch transfinite Induktion nach α :
 Sei $\beta \in K$ und $\theta\xi\beta = \beta$ für alle $\xi < \alpha$. Durch C-Induktion zeigt man $(\gamma \in C(\alpha, \beta) \rightarrow \gamma \notin \beta)$. Also ist $\beta \in B(\alpha)$. Mit b) folgt $\theta\alpha\beta = \beta$.
 d₂) folgt sofort aus d₁) .
 e) Sei $\beta_1 := \min\{\xi \mid \xi \notin C(\alpha, 0)\}$. Aus L1 folgt $C(\alpha, \beta_1) = C(\alpha, 0)$ und $\theta\alpha 0 \leq \beta_1$. Es ist $C(\alpha, 0) \subset C(\alpha, \theta\alpha 0)$, folglich $\theta\alpha 0 \notin C(\alpha, 0)$ und daher $\beta_1 < \theta\alpha 0$.

f) Ist β additive Hauptzahl, so kann keine der Regeln (C1) - (C4) zu der Konklusion $\beta \in C(0, \beta)$ führen, also ist dann $\beta \in E, C$.

Ist β keine additive Hauptzahl, so ergibt sich $\beta \in C(0, \beta)$ aus den Regeln (C1) und (C2).

$$g) \alpha_1 < \alpha_2 \implies B(\alpha_2) \subset B(\alpha_1) \implies \theta \alpha_1 \beta \subset \theta \alpha_2 \beta.$$

$C(\alpha_1, \theta \alpha_1 \beta) \subset C(\alpha_2, \theta \alpha_2 \beta)$ ergibt sich mit Folg. (1), (2) und d).

Definition

$$\gamma_{NF} = \gamma_1 + \dots + \gamma_n : \iff \gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n \wedge 2 \leq n \wedge \gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n \text{ add. Hauptz.}$$

Satz 2

$$a) \gamma_{NF} = \gamma_1 + \dots + \gamma_n \wedge \gamma_{NF} = \delta_1 + \dots + \delta_m \implies m = n \wedge \gamma_i = \delta_i \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

$$b) \text{ Für } \gamma_{NF} = \gamma_1 + \dots + \gamma_n \text{ gilt: } \gamma \in C(\alpha, \beta) \iff \gamma_1, \dots, \gamma_n \in C(\alpha, \beta).$$

$$c) \xi, \eta \in C(\alpha, \beta) \implies \xi + \eta \in C(\alpha, \beta).$$

$$d) \xi + \eta \in C(\alpha, \beta) \implies \eta \in C(\alpha, \beta).$$

Lemma 2

$$\xi < \alpha \wedge \xi \in C(\xi, \theta \alpha \beta) \implies \theta \xi(\theta \alpha \beta) = \theta \alpha \beta.$$

Beweis:

$$\xi < \alpha \implies B(\alpha) \subset B(\xi) \implies \exists \eta (\theta \alpha \beta = \theta \xi \eta).$$

Wäre $\eta < \theta \alpha \beta$, so würde mit (C1), (C2), (C3) folgen $\theta \xi \eta \in C(\alpha, \theta \alpha \beta)$.

Da jedoch $\theta \xi \eta = \theta \alpha \beta \notin C(\alpha, \theta \alpha \beta)$ ist, muss $\eta = \theta \alpha \beta$ sein.

Lemma 3

$$\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \beta)) \implies C(\alpha_1, \beta) = C(\alpha_2, \beta).$$

Beweis:

Transfinite Induktion nach α_2 :

$$I) \alpha_2 \text{ Limeszahl: } \alpha_1 < \alpha_2 \wedge \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \beta)) \wedge \text{Ind.vor.}$$

$$\implies \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \rightarrow C(\alpha_1, \beta) = C(\xi, \beta)) \implies C(\alpha_1, \beta) = C(\alpha_2, \beta).$$

$$II) \alpha_2 = \alpha_0 + 1: \text{ Aus der Ind.vor. folgt } C(\alpha_1, \beta) = C(\alpha_0, \beta) \subset C(\alpha_0 + 1, \beta).$$

$$\text{Aus } \alpha_0 \notin C(\alpha_0, \beta) \text{ folgt durch C-Induktion } C(\alpha_0 + 1, \beta) \subset C(\alpha_0, \beta).$$

Satz 3

$$a) \alpha_1 < \alpha_2 \wedge \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \theta \alpha_1 \beta)) \implies$$

$$\implies \theta \alpha_1 \beta = \theta \alpha_2 \beta \wedge C(\alpha_1, \theta \alpha_1 \beta) = C(\alpha_2, \theta \alpha_2 \beta).$$

$$b) \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \theta \alpha_1 \beta)) \iff \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_2, \theta \alpha_2 \beta)).$$

Beweis: a)

Wir beweisen zunächst $\theta \alpha_1 \beta = \theta \alpha_2 \beta$. Der zweite Teil der Behauptung

folgt dann mit L3.

Ist $\beta \in K$, so $\theta\alpha_1\beta = \beta = \theta\alpha_2\beta$: - Sei $\beta \notin K$, also auch $\theta\alpha_1\beta \notin K$.

Für $\eta \leq \theta\alpha_1\beta$ ist dann $C(\alpha_1, \eta) \subset C(\alpha_1, \theta\alpha_1\beta)$, also gilt $\forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \eta))$. Mit Lemma 3 folgt $C(\alpha_1, \eta) = C(\alpha_2, \eta)$. - Wir haben also $\forall \eta (\eta \leq \theta\alpha_1\beta \rightarrow (\eta \in B(\alpha_1) \leftrightarrow \eta \in B(\alpha_2)))$ und somit $\theta\alpha_1\beta = \theta\alpha_2\beta$.

b) folgt aus a) und Satz 1g).

Satz 4

$\exists \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \wedge \xi \in C(\alpha_2, \theta\alpha_2\beta)) \implies \theta\alpha_1(\theta\alpha_2\beta) = \theta\alpha_2\beta$.

Beweis:

Aus der Prämisse und Satz 3b) folgt $\exists \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \wedge \xi \in C(\alpha_1, \theta\alpha_1\beta))$.

Für ein solches ξ gilt dann $\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \wedge \xi \in C(\xi, \theta\alpha_2\beta)$, also (nach Satz 1g) und L2) $\theta\alpha_2\beta \leq \theta\alpha_1(\theta\alpha_2\beta) \leq \theta\xi(\theta\alpha_2\beta) = \theta\alpha_2\beta$.

Satz 5

$\theta\alpha\beta \leq \gamma \wedge \gamma \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) \implies S\beta < S\gamma$.

Beweis:

C-Induktion:

(C2) $\gamma \bar{\text{NF}} \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ mit $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in C(\alpha, \theta\alpha\beta)$:

$\theta\alpha\beta \leq \gamma \implies \theta\alpha\beta \leq \gamma_1$ [mit I.V.] $\implies S\beta < S\gamma_1 = S\gamma$.

(C3) $\gamma = \theta\xi\eta$ mit $\xi < \alpha \wedge \xi, \eta \in C(\alpha, \theta\alpha\beta)$:

Satz 4 $\implies \theta\xi(\theta\alpha\beta) = \theta\alpha\beta \leq \theta\xi\eta \implies \theta\alpha\beta \leq \eta$ [mit I.V.] $\implies S\beta < S\eta = S\gamma$.

(C4) $\theta\alpha\beta < \gamma \in K$: $S\beta < \gamma = S\gamma$.

Satz 6

a) $\theta\alpha$ ist Normalfunktion.

b) $B(\alpha + 1) = \{\theta\alpha\beta \mid \alpha \notin C(\alpha, \theta\alpha\beta) \vee \theta\alpha\beta = \beta\}$.

c) $B(\alpha) = \cap \{B(\xi) \mid \xi < \alpha\}$, wenn α Limeszahl ist.

Beweis:

a) Sei $\emptyset \neq M \subset B(\alpha)$ und $\gamma := \sup M \in \text{ON}$. Zu zeigen ist $\gamma \in B(\alpha)$.

Es ist $\text{MUK} \subset B(\alpha)$. Sei also $\gamma \notin \text{MUK}$: Dann ist γ eine Limeszahl $> S\gamma$.

Wegen $M \subset B(\alpha)$ folgt daraus $C(\alpha, \gamma) \subset \cup \{C(\alpha, \theta\alpha\eta) \mid S\gamma = S\eta \wedge \theta\alpha\eta \in M\}$.

Aus $S\gamma = S\eta \wedge \theta\alpha\eta \in M$ folgt mit Satz 5 $\gamma \notin C(\alpha, \theta\alpha\eta)$. - Also ist $\gamma \in B(\alpha)$.

b) 1. Sei $\beta = \theta\alpha\beta$:

Durch C-Induktion zeigen wir: $\gamma \in C(\alpha + 1, \beta) \rightarrow \gamma \neq \beta$.

zu (C3): $\gamma = \theta\xi\eta$ mit $\xi < \alpha + 1 \wedge \xi, \eta \in C(\alpha + 1, \beta)$:

Aus $\eta \in C(\alpha + 1, \beta)$ folgt mit der I.V. $\theta\xi\eta \neq \theta\xi\beta$. Aus $\xi < \alpha$ folgt $\beta \leq \theta\xi\beta \leq \theta\alpha\beta = \beta$, also $\theta\xi\beta = \beta$.

2. Sei $\alpha \notin C(\alpha, \theta\alpha\beta)$:

Mit L3 folgt $C(\alpha, \theta\alpha\beta) = C(\alpha + 1, \theta\alpha\beta)$, also $\theta\alpha\beta \notin C(\alpha + 1, \theta\alpha\beta)$.

3. Sei $\gamma \in B(\alpha+1)$. Dann ist $\gamma \in B(\alpha)$, also $\exists \beta (\gamma = \theta\alpha\beta)$.

Annahme: $\alpha \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) \wedge \beta < \theta\alpha\beta$.

Aus der Annahme folgt $\alpha, \beta \in C(\alpha+1, \theta\alpha\beta)$ und weiter mit (C3) $\theta\alpha\beta \in C(\alpha+1, \theta\alpha\beta)$, was im Widerspruch zu $\gamma \in B(\alpha+1)$ steht.

c) folgt aus $C(\alpha, \beta) = \{C(\xi, \beta) \mid \xi < \alpha\}$ für Limeszahlen α .

Satz 7

a) $\alpha < \Omega_1 0 \implies \alpha < \theta\alpha 0$.

b) $\theta(\Omega_1 0) 0 = \Omega_1 0$.

c) $\alpha < \Omega_1 0 \implies B(\alpha+1) = \{\beta \mid \theta\alpha\beta = \beta\}$

Folgerung: $\theta^1 0 = \varepsilon_\beta$ und $\Omega_1 0 = \kappa_0 = \Gamma_0$.

Beweis:

a) Es gilt: $\alpha < \Omega_1 0 \leftrightarrow \alpha \in C(\Omega_1, 0) \wedge \alpha < \Omega_1$.

Durch C-Induktion zeigen wir: $\alpha \in C(\Omega_1, 0) \wedge \alpha < \Omega_1 \rightarrow \alpha < \theta\alpha 0$.

zu (C3): $\alpha = \theta\xi\eta$ mit $\xi < \Omega_1 \wedge \xi, \eta \in C(\Omega_1, 0)$.

I.V. $\implies \xi < \theta\xi 0 \leq \alpha \implies \xi < \theta\alpha 0$.

$\xi < \alpha \wedge \xi \in C(\xi, \theta\alpha 0)$ [mit L2] $\implies \theta\xi(\theta\alpha 0) = \theta\alpha 0$.

$\eta \leq \alpha < \Omega_1$ [mit I.V.] $\implies \eta < \theta\eta 0 \leq \theta\alpha 0$.

Also gilt $\alpha = \theta\xi\eta < \theta\xi(\theta\alpha 0) = \theta\alpha 0$.

b) Aus Satz 5 folgt $\forall \xi (\Omega_1 0 \leq \xi < \Omega_1 \rightarrow \xi \notin C(\Omega_1, \Omega_1 0))$, woraus sich mit Satz 3 die Behauptung ergibt.

c) Aus $\alpha < \Omega_1 0$ folgt nach a) $\alpha \in C(\alpha, \theta\alpha\beta)$.

Satz 8

$\theta\alpha_1\beta_1 < \theta\alpha_2\beta_2$ gilt genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

(i) $\exists \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \wedge \xi \in C(\alpha_2, \theta\alpha_2\beta_2)) \wedge \beta_1 < \theta\alpha_2\beta_2$.

(ii) $\forall \xi (\alpha_2 \leq \xi < \alpha_1 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \theta\alpha_1\beta_1)) \wedge \beta_1 < \beta_2$.

(iii) $\theta\alpha_1\beta_1 < \beta_2$.

Beweis:

(i) $\vee$ (ii) $\vee$ (iii) [mit Satz 3 und 4] $\implies \theta\alpha_1\beta_1 < \theta\alpha_2\beta_2$.

$\theta\alpha_1\beta_1 < \theta\alpha_2\beta_2 \wedge \neg(i) \implies \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \rightarrow \xi \notin C(\alpha_2, \theta\alpha_2\beta_2)) \implies$

[mit Satz 3] $\implies \theta\alpha_1\beta_1 < \theta\alpha_2\beta_2 \leq \theta\alpha_1\beta_2 \implies \beta_1 < \beta_2$.

$\theta\alpha_1\beta_1 < \theta\alpha_2\beta_2 \wedge \beta_1 < \beta_2 \wedge \neg(ii) \implies \exists \xi (\alpha_2 \leq \xi < \alpha_1 \wedge \xi \in C(\alpha_1, \theta\alpha_1\beta_1)) \implies$

[mit Satz 4] $\implies \theta\alpha_2(\theta\alpha_1\beta_1) = \theta\alpha_1\beta_1 < \theta\alpha_2\beta_2 \implies \theta\alpha_1\beta_1 < \beta_2$.

Lemma 4

$\theta\alpha\beta < \theta\xi\eta < \theta\alpha(\beta+1) \implies \xi < \alpha$.

Beweis mit Folgerung (2) auf Seite 1.

Lemma 5

$$\beta_1, \beta_2 < \Theta \alpha_1 \beta_1 = \Theta \alpha_2 \beta_2 \quad ==> \quad \beta_1 = \beta_2 .$$

Beweis:

O.E.d.A. sei $\alpha_1 < \alpha_2$. Aus den Sätzen 3 und 4 folgt $\Theta \alpha_2 \beta_2 = \Theta \alpha_1 (\Theta \alpha_2 \beta_2)$ oder $\Theta \alpha_2 \beta_2 = \Theta \alpha_1 \beta_2$. Mit $\beta_1 < \Theta \alpha_1 \beta_1 = \Theta \alpha_2 \beta_2$ folgt daraus $\beta_1 = \beta_2$.

Definition

$$\gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \xi \eta \quad :<==> \quad \gamma = \Theta \xi \eta \wedge \xi \in C(\xi, \Theta \xi \eta) \wedge \eta < \Theta \xi \eta .$$

Satz 9

Sei $\gamma = \Theta \xi \eta$:

- a) $\gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \xi \eta \quad <==> \quad \xi = \max\{\sigma \mid \Theta \sigma \eta = \gamma > \eta\} \quad <==> \quad \xi = \max\{\sigma \mid \gamma \in B(\sigma)\} .$
 b) $\gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \xi^* \eta \quad <==> \quad \eta < \Theta \xi \eta \wedge \xi^* = \min\{\sigma \mid \xi \leq \sigma \in C(\xi, \Theta \xi \eta)\} .$

Beweis:

- a) 1. $\gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \xi \eta$ [mit Satz 1g) und Satz 8] $==> \quad \gamma = \Theta \xi \eta < \Theta(\xi+1)\eta$.
 2. $\eta < \gamma < \Theta(\xi+1)\eta$ [mit L5] $==> \quad \forall \tau (\gamma \neq \Theta(\xi+1)\tau) \quad ==> \quad \gamma \notin B(\xi+1)$.
 3. Sei $\gamma \notin B(\xi+1)$, d.h. $\gamma \in C(\xi+1, \gamma)$. Dann ist $\gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \sigma \tau$ mit $\sigma < \xi+1$ und $\sigma, \tau \in C(\xi+1, \gamma)$. Aus $\alpha \leq \xi \wedge \tau < \gamma$ folgt $\gamma < \Theta \sigma \tau \leq \Theta \xi \gamma$, somit $\eta < \gamma$. Aus $\gamma \notin B(\xi+1)$ folgt ferner $\gamma < \Theta(\xi+1)\eta$, also nach S.3a) $\xi \in C(\xi, \Theta \xi \eta)$.
 b) Aus $\gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \xi^* \eta$ folgt $\xi^* = \min\{\sigma \mid \xi \leq \sigma \in C(\xi, \Theta \xi \eta)\}$ mit den Sätzen 9a), 8 und 3. Aus $\xi^* = \min\{\sigma \mid \xi \leq \sigma \in C(\xi, \Theta \xi \eta)\}$ folgt mit Satz 3a) $\Theta \xi \eta = \Theta \xi^* \eta \wedge \xi^* \in C(\xi^*, \Theta \xi^* \eta)$.

Satz 10

- a) $\gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \xi_1 \eta_1 \wedge \gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \xi_2 \eta_2 \quad ==> \quad \xi_1 = \xi_2 \wedge \eta_1 = \eta_2 .$
 b) Für $\beta \leq \gamma \stackrel{\text{NF}}{\sim} \Theta \xi \eta$ gilt: $\gamma \in C(\alpha, \beta) \quad <==> \quad \xi < \alpha \wedge \xi, \eta \in C(\alpha, \beta) .$
 c) $\Theta \xi \eta \in C(\alpha, \beta) \quad ==> \quad \eta \in C(\alpha, \beta) .$

Beweis:

- a) folgt aus L5 und Satz 9a).
 b) folgt aus a) und Satz 1d)f) .
 c) folgt aus L5.

Die bisher gewonnenen Ergebnisse gelten unabhängig von der zu Grunde gelegten Funktionenmenge $\mathcal{G}$. - Von jetzt an wollen wir uns ausschliesslich auf die spezielle Menge $\mathcal{G} = \{g\}$ (mit der im Anschluss definierten 2-stelligen Funktion g) beziehen. Die Regel (C4) der Definition auf Seite 1 lautet dann:

$(C+)$ $\xi, \eta \in C(\alpha, \beta) \wedge \beta < \xi\eta \wedge \xi \neq \xi\eta \neq \eta \implies \xi\eta \in C(\alpha, \beta)$.

Definition der 2-stelligen Funktion g

1. $g0$ sei die Ordnungsfunktion von K , also $g0\beta = \Omega_{1+\beta}$.
2. Für $\alpha > 0$ sei $g\alpha$ die Ordnungsfunktion von $\{\eta \mid \forall \xi (\xi < \alpha \rightarrow \eta \in \text{dom } g\xi \wedge g\xi\eta = \eta)\}$.

Definition

$G^* := \{\xi \mid g\xi 0 = \xi\}$.

$\alpha \mapsto \Lambda_\alpha$ sei die Ordnungsfunktion von G^* .

$G\beta := \min\{\xi \mid \xi \in G^* \wedge \beta \leq \xi\}$.

$\gamma \bar{\text{NF}} g\xi\eta \iff \gamma = g\xi\eta \wedge \xi, \eta < \gamma$.

Satz 11

- a) $g\alpha$ ist Normalfunktion.
- b) Λ ist Normalfunktion.
- c) $\alpha_1 < \alpha_2 \implies g\alpha_1\beta \leq g\alpha_2\beta \wedge (\beta \notin K \rightarrow g\alpha_1\beta < g\alpha_2\beta)$.
- d) $\alpha, \beta \leq g\alpha\beta \wedge (0 < \beta \rightarrow \alpha < g\alpha\beta) \wedge (\beta \notin K \rightarrow \beta < g\alpha\beta)$.

Beweis: zu a) und b) siehe z.B. [2]; c) und d) sind klar.

Satz 12

$g\alpha_1\beta_1 \stackrel{<}{=} g\alpha_2\beta_2$ gilt genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

- (i) $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \beta_1 \stackrel{<}{=} g\alpha_2\beta_2$.
- (ii) $\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 \stackrel{<}{=} \beta_2$.
- (iii) $\alpha_2 < \alpha_1 \wedge g\alpha_1\beta_1 \stackrel{<}{=} \beta_2$.

Beweis klar.

Satz 13

- a) $\xi, \eta < \Lambda_T \implies \xi + \eta, \Theta\xi\eta, g\xi\eta < \Lambda_T$.
- b) $\gamma \in C(\alpha, \beta) \implies \gamma < G\beta$.
- c) $\gamma \in K \setminus G^* \iff \exists \xi\eta (\gamma \bar{\text{NF}} g\xi\eta)$.

Beweis:

- a) $\xi, \eta < \Lambda_T \implies \xi + \eta, \Theta\xi\eta < \Lambda_T$ [weil $\Lambda_T \in K \subset B(0)$ und $S\Theta\xi\eta = S\eta$].
 $\xi < \Lambda_T \wedge \eta < \Lambda_T = g\Lambda_T 0$ [mit Satz 12] $\implies g\xi\eta < g\Lambda_T 0 = \Lambda_T$.
- b) folgt aus a) durch C-Induktion.
- c) 1. $\gamma \bar{\text{NF}} g\xi\eta \implies \xi < \gamma \wedge \eta < \gamma \leq g\gamma 0$ [mit Satz 12] $\implies \gamma = g\xi\eta < g\gamma 0$.
 2. Sei $\gamma \in K \setminus G^*$, also $0 < \gamma < g\gamma 0$. Sei $\xi := \min\{\sigma \mid \gamma < g\sigma\gamma\}$.
 Ist $\xi = 0$, so $\exists \eta (\gamma = g\xi\eta)$ wegen $\gamma \in K$. Ist $\xi \neq 0$, so gilt $\gamma = g\sigma\gamma$ für alle $\alpha \leq \xi$, also $\exists \eta (\gamma = g\xi\eta)$ nach Def. von g . Aus $g\xi\eta = \gamma$ und

$\gamma \notin G^*$ folgt (mit Satz 11d) $\xi < g\xi\eta = \gamma$. Aus $\gamma = g\xi\eta < g\xi\gamma$ folgt $\eta < \gamma$.

Satz 14

- a) $\eta_1, \eta_2 < g\xi_1\eta_1 = g\xi_2\eta_2 \implies \xi_1 = \xi_2 \wedge \eta_1 = \eta_2$.
 b) Für $\gamma_{NF} g\xi\eta$ gilt: $\gamma \in C(\alpha, \beta) \iff \xi, \eta \in C(\alpha, \beta) \wedge \gamma \neq \beta$.
 c) $\xi, \eta \in C(\alpha, \beta) \wedge \beta \neq g\xi\eta \implies g\xi\eta \in C(\alpha, \beta)$.
 d) $g\xi\eta \in C(\alpha, \beta) \implies \eta \in C(\alpha, \beta)$.

Beweis:

- a) folgt aus Satz 12.
 b) folgt aus Satz 11d) und Satz 14a).
 c) Sei $\xi, \eta \in C(\alpha, \beta) \wedge \beta \neq g\xi\eta \wedge \gamma = g\xi\eta$. Es gilt $(\gamma_{NF} g\xi\eta \vee \gamma \in \{\xi, \eta\})$.
 Mit Satz 14b) folgt die Behauptung.
 d) folgt aus $\eta \leq g\xi\eta$ und Satz 14a).

Lemma 6

Zu α, β, γ mit $\gamma < G\beta$ existiert ein γ^* mit $\gamma \leq \gamma^* < G\beta$ und $\gamma^* \in C(\alpha, \beta)$

Beweis:

Sei $G\beta = \Lambda_\tau$ und $\beta < \Lambda_\tau$ (sonst Beh. trivial). Dann ist τ keine Limeszahl.

$$\xi_0 := \begin{cases} 0, & \text{wenn } \tau=0 \\ \Lambda_{\tau_0} + 1, & \text{wenn } \tau = \tau_0 + 1 \end{cases}, \quad \xi_{n+1} := g\xi_n 0,$$

$$\eta_0 := \xi_0 + 1, \quad \eta_{n+1} := g\eta_n 0.$$

Offensichtlich gilt $\xi_n < \eta_n < \xi_{n+1} < \Lambda_\tau$ und $\sup\{\xi_n | n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\eta_n | n \in \mathbb{N}\} = \Lambda_\tau$.
 Fall 1: $\forall i (0 < i \in \mathbb{N} \rightarrow \beta \neq \xi_i)$. Durch Ind. nach n zeigt man $\xi_n \in C(\alpha, \beta)$.

Fall 2: $\exists i (0 < i \in \mathbb{N} \wedge \beta = \xi_i)$. Dann gilt $\eta_0 \in C(\alpha, \beta)$ und $\forall i (0 < i \in \mathbb{N} \rightarrow \beta \neq \eta_i)$.

Durch Ind. nach n zeigt man $\eta_n \in C(\alpha, \beta)$.

Definition

- (i) Für $\gamma < G\beta$ sei $\mu[\gamma, \alpha, \beta] := \min\{\xi | \gamma \leq \xi \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)\}$.
 (ii) $\delta \leq \mu[\gamma, \alpha, \beta] \iff \forall \xi (\gamma \leq \xi < \delta \rightarrow \xi \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta))$.

Lemma 7

$\eta < \Theta\xi\eta = \gamma \wedge \xi < G\eta \implies \gamma_{NF} \Theta\mu[\xi, \xi, \eta]\eta$.

Beweis mit L6 und Satz 9b).

Lemma 8

$\xi < \alpha \wedge \xi \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \beta \leq \eta < \Theta\xi\eta \implies \mu[\xi, \xi, \eta] < \alpha$.

Beweis:

Aus $\xi \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \beta \leq \eta$ folgt mit Satz 13b) $\xi < G\Theta\alpha\beta = G\beta \leq G\eta$.

Wegen $\eta < \Theta\xi\eta$ gilt nach L7 $\Theta\xi\eta = \Theta\mu[\xi, \xi, \eta]\eta$.

$\xi < \alpha \wedge \eta < \Theta\xi\eta \implies \eta < \Theta\alpha\eta \wedge \eta \notin K$ [mit $\beta \leq \eta \implies C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \subset C(\eta, \Theta\alpha\eta)$].

$\xi < \alpha \wedge \xi \in C(\alpha, \Theta\alpha\eta) \wedge \eta < \Theta\alpha\eta$ [mit Satz 8] $\implies$

$\implies \Theta\mu[\xi, \xi, \eta]\eta = \Theta\xi\eta < \Theta\alpha\eta \implies$ Behauptung.

Lemma 9

$\Theta\xi\eta \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \alpha \leq \mu[\xi, \alpha, \beta] \implies (\delta\eta)^+ \leq \mu[\Theta\xi\eta, \alpha, \beta]$.

Beweis:

Wir zeigen durch C-Induktion $C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \subset C(\xi, \Theta\xi\eta)$, woraus mit Satz 5 die Behauptung folgt.

zu (C3): $\delta \notin_{NF} \Theta\sigma\tau$ mit $\alpha < \sigma, \tau \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$.

$\alpha < \mu[\xi, \alpha, \beta] \wedge \sigma \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \implies \sigma < \xi$ [mit I.V.] $\implies \Theta\sigma\tau \in C(\xi, \Theta\xi\eta)$.

zu (C4): $\delta \notin_{NF} \sigma\tau > \Theta\alpha\beta \wedge \sigma, \tau \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$.

$\Theta\xi\eta \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \implies \Theta\xi\eta \notin \sigma\tau$ [mit I.V.] $\implies \sigma\tau \notin C(\xi, \Theta\xi\eta)$.

Lemma 10

$\xi^* \leq \mu[\xi, \alpha, \beta] \wedge \Theta\xi^*\eta_0 < \Theta\xi\eta < \Theta\xi^*(\eta_0+1) \wedge \Theta\alpha\beta \leq \Theta\xi\eta \implies$

$\implies \Theta\xi^*(\eta_0+1) \leq \mu[\Theta\xi\eta, \alpha, \beta]$.

Beweis:

Wir zeigen durch C-Induktion: $\delta \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \cap C(\xi^*, \Theta\xi^*(\eta_0+1)) \rightarrow$
 $\rightarrow \delta \in C(\xi, \Theta\xi\eta)$.

Mit Satz 5 folgt daraus die Behauptung.

zu (C3): $\delta \notin_{NF} \Theta\sigma\tau$ mit $\alpha < \sigma, \tau \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$. Sei $\Theta\xi\eta \leq \delta$ (sonst klar).

Es gilt $\sigma < \xi^* \wedge \sigma, \tau \in C(\xi^*, \Theta\xi^*(\eta_0+1))$. (Für $\Theta\xi^*(\eta_0+1) \leq \delta$ folgt dies aus $\delta \in C(\xi^*, \Theta\xi^*(\eta_0+1))$ und Satz 10b. Für $\delta < \Theta\xi^*(\eta_0+1)$ folgt $\sigma < \xi^*$ aus $\Theta\xi^*\eta_0 < \delta$ und L4, somit $\sigma, \tau \in C(\sigma, \Theta\sigma\tau) \subset C(\xi^*, \Theta\xi^*(\eta_0+1))$.)

Aus $\sigma < \xi^* \leq \mu[\xi, \alpha, \beta] \wedge \sigma \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$ folgt $\sigma < \xi$.

Mit der I.V. erhält man schliesslich $\delta \notin_{NF} \Theta\sigma\tau \in C(\xi, \Theta\xi\eta)$.

zu (C4): $\delta \notin_{NF} \sigma\tau$ mit $\sigma, \tau \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$.

$\delta \notin_{NF} \sigma\tau \in C(\xi^*, \Theta\xi^*(\eta_0+1))$ [mit Satz 14b] $\implies \sigma, \tau \in C(\xi^*, \Theta\xi^*(\eta_0+1))$

[mit I.V.] $\implies \sigma, \tau \in C(\xi, \Theta\xi\eta)$ [wegen $\Theta\xi\eta \notin K$] $\implies \sigma\tau \in C(\xi, \Theta\xi\eta)$.

Lemma 11

Ist $\xi^* \leq \mu[\xi, \alpha, \beta]$ und $g\xi\eta \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$, so gilt:

(i) $g\xi^*\eta_0 \leq g\xi\eta < g\xi^*(\eta_0+1) \implies g\xi^*(\eta_0+1) \leq \mu[g\xi\eta, \alpha, \beta]$.

(ii) $g\xi\eta < g\xi^*0 \implies g\xi^*0 \leq \mu[g\xi\eta, \alpha, \beta]$.

Beweis:

(i) Wir beweisen durch transfinite Induktion nach δ :

$\delta \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \delta < g\xi^*(\eta_0+1) \rightarrow \delta < g\xi\eta$.

1. $\delta \notin K_0 \implies S\delta < \delta$ [mit Satz 1c) und I.V.] $\implies S\delta < g\xi\eta \implies \delta < g\xi\eta$.

2. Sei $\delta \in \overline{NF}$ $g\sigma\tau$ mit $\sigma, \tau \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge g\sigma\tau < g\xi^*(\eta_0+1)$.

Wegen $g\xi^*\eta_0 \leq g\xi\eta \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$ gilt: $\delta \leq g\xi^*\eta_0 \rightarrow \delta < g\xi\eta$.

Sei nun $g\xi^*\eta_0 < \delta$. Aus $\delta < g\xi^*(\eta_0+1)$ folgt mit Satz 12 $\sigma < \xi^*$.

Aus $\sigma < \xi^* \leq \mu[\xi, \alpha, \beta]$ folgt $\sigma < \xi$. Nach I.V. ist $\tau < g\xi\eta$.

Satz 12 liefert $\delta = g\sigma\tau < g\xi\eta$.

(ii) beweist man in gleicher Weise wie (i).

Zum Abschluss von §1 wollen wir noch kurz auf die bezüglich der Mengen $\mathcal{C} = \{\Omega_\xi \mid 0 < \xi < \tau\}$ (mit $\tau < \Omega_1$) bzw. $\mathcal{C} = \{g0\}$ definierten Funktionen $\overset{(T)}{\Theta}\alpha$ bzw. $\overset{1}{\Theta}\alpha$ eingehen, und diese mit $\Theta\alpha$ vergleichen.

Lemma 12

Für $\gamma \in C(\Omega_{\Omega_1}, 0)$ gilt:

a) $\gamma < \Omega_{\Omega_1} \implies \gamma < \Omega_{\Theta\gamma 0}$.

b) $S\gamma = 0 \implies \gamma < \Omega_{\gamma 0}$.

c) $\gamma \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta+1) \wedge S\beta = 0 \implies \gamma \in C(\Omega_{\Theta\alpha\beta}, 0)$.

Beweis:

Simultane C-Induktion für a), b), c) :

zu (C3): $\gamma \in \overline{NF}$ $\Theta\xi\eta$ mit $\xi < \Omega_{\Omega_1} \wedge \xi, \eta \in C(\Omega_{\Omega_1}, 0)$.

a) $\eta < \gamma < \Omega_{\Omega_1}$ [mit I.V.a)] $\implies \eta < \Omega_{\Theta\eta 0} \leq \Omega_{\Theta\gamma 0}$ [mit Satz 1b)] $\implies$ Beh.

b) I.V.a)-c) $\implies \xi < \Omega_{\xi 0} \leq \Omega_{\gamma} \wedge \eta < \Omega_{\eta 0} \leq \Omega_{\gamma 0} \wedge \xi \in C(\Omega_{\gamma}, 0) \implies$
[mit Satz 8] $\implies \Theta\xi\eta < \Omega_{\gamma 0}$.

c) 1. $\gamma < \Theta\alpha\beta$ [mit b)] $\implies \gamma < \Omega_{\gamma 0} \leq \Omega_{\Theta\alpha\beta 0}$ [mit Satz 1e)] $\implies \gamma \in C(\Omega_{\Theta\alpha\beta}, 0)$.

2. $\Theta\alpha\beta < \gamma \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta+1)$ [mit Satz 10b)] $\implies \xi < \alpha \wedge \xi, \eta \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta+1)$
[mit I.V. a)+c)] $\implies \xi < \Omega_{\xi 0} \leq \Omega_{\Theta\alpha\beta} \wedge \xi, \eta \in C(\Omega_{\Theta\alpha\beta}, 0) \implies \gamma \in C(\Omega_{\Theta\alpha\beta}, 0)$.

zu (C4): $\gamma \in \overline{NF}$ $g\xi\eta$ mit $\xi, \eta \in C(\Omega_{\Omega_1}, 0)$.

a) $\gamma < \Omega_{\Omega_1} = g0(g00) \implies \xi = 0 \wedge \eta < \Omega_1$ [mit I.V.b)] $\implies \eta < \Omega_{1+\eta 0}$
 $\implies \gamma = g0\eta < g0(\Omega_{1+\eta 0}) = \Omega_{\Theta\gamma 0}$.

b) ist trivial. c) folgt mit Satz 14b) aus der I.V.

Satz 15

a) $\alpha \leq g10 \implies \overset{1}{\Theta}\alpha\beta = \Theta\alpha\beta \wedge \overset{1}{C}(\alpha, \beta) \cap g10 = C(\alpha, \beta) \cap g10$.

b) $\alpha \leq \Omega_\tau \wedge \tau \leq \Omega_{\Omega_1 0} \implies \overset{(T)}{\Theta}\alpha\beta = \Theta\alpha\beta \wedge \overset{(T)}{C}(\alpha, \beta) \cap (\alpha+1)\Omega_\tau = C(\alpha, \beta) \cap (\alpha+1)\Omega_\tau$.

Beweis von a) durch transfinite Induktion nach α mit Satz 1f) und Satz 6; daneben C-Induktion. — Aus L12b) folgt mit Satz 1e):

$\forall \gamma (\beta \neq \Omega_\gamma \leq \alpha \wedge \gamma < \Omega_{\Omega_1 0} \rightarrow \Omega_\gamma \in C(\alpha, \beta))$. Mit Hilfe dieses Satzes wird b) analog zu a) bewiesen.

§ 2 Eine rekursive Charakterisierung

der Ordinalzahlenmenge $C(\Lambda_0, 0)$

v_0 sei ein beliebiges - im folgenden festgehaltenes - Element von K_0 .

v und κ seien Mitteilungszeichen für Elemente von $\{\xi \in K_0 \mid v_0 \leq \xi^+\}$.

Induktive Definition einer Ordinalzahlenmenge T

$$(T1) \quad \gamma = 0 \vee \gamma < v_0 \quad ==> \quad \gamma \in T.$$

$$(T2) \quad \gamma_{NF} \gamma_1 + \dots + \gamma_n > v_0 \wedge \gamma_1, \dots, \gamma_n \in T \quad ==> \quad \gamma \in T.$$

$$(T3) \quad \gamma_{NF} \Theta \xi \eta > v_0 \wedge \xi, \eta \in T \quad ==> \quad \gamma \in T.$$

$$(T4) \quad \gamma_{NF} g \xi \eta \geq v_0 \wedge \xi, \eta \in T \quad ==> \quad \gamma \in T.$$

Definition von L_γ für $\gamma \in T$

$$L_\gamma := \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } \gamma = 0 \vee \gamma < v_0 : \\ \max\{L_{\gamma_1}, \dots, L_{\gamma_n}\} + 1 & , \text{ wenn } \gamma_{NF} \gamma_1 + \dots + \gamma_n > v_0 . \\ \max\{L_\xi, L_\eta\} + 1 & , \text{ wenn } \gamma_{NF} \Theta \xi \eta > v_0 \vee \gamma_{NF} g \xi \eta \geq v_0 . \end{cases}$$

Folgerung: Für $\gamma \in T$ gilt $L(\gamma+1) \leq L_\gamma + 1$.

Definition der Koeffizientenmengen $K_\kappa^* \gamma$ und $K_\kappa \gamma$ für $\gamma \in T$

$$1. \quad K_\kappa^* 0 := K_\kappa 0 := \emptyset .$$

$$2. \quad K_\kappa^* \gamma := \emptyset \text{ und } K_\kappa \gamma := \{\gamma\} , \text{ wenn } \gamma \in B(0) \wedge S\gamma \leq \kappa .$$

$$3. \quad K_\kappa^{(*)} \gamma := \bigcup_{i=1}^n K_\kappa^{(*)} \gamma_i , \text{ wenn } \gamma_{NF} \gamma_1 + \dots + \gamma_n .$$

$$4. \quad K_\kappa^* \gamma := \{\xi\} \cup K_\kappa^* \xi \cup K_\kappa^* \eta \text{ und}$$

$$K_\kappa \gamma := K_\kappa \xi \cup K_\kappa \eta , \text{ wenn } \gamma_{NF} \Theta \xi \eta \wedge S\gamma > \kappa .$$

$$5. \quad K_\kappa^{(*)} \gamma := K_\kappa^{(*)} \xi \cup K_\kappa^{(*)} \eta , \text{ wenn } \gamma_{NF} g \xi \eta > \kappa .$$

Abkürzungen

Sei M eine Menge von Ordinalzahlen:

$$M < \alpha : \Leftrightarrow \forall \xi (\xi \in M \rightarrow \xi < \alpha) .$$

$$\alpha \leq M : \Leftrightarrow \neg (M < \alpha) \quad \Leftrightarrow \exists \xi (\xi \in M \wedge \alpha \leq \xi) .$$

$$K_\kappa^{(*)} M := \bigcup \{K_\kappa^{(*)} \xi \mid \xi \in M\} , \text{ wenn } M \subset T .$$

Folgerungen

- (1) $\beta \leq v_0 \implies C(\alpha, \beta) \subset T$.
 (2) $\xi, \eta \in T \implies \xi + \eta, g\xi\eta \in T$.
 (3) $\gamma \in T \implies \gamma < Gv_0$.

Für $\gamma, \xi, \eta \in T$ gilt:

- (4) $K_\kappa^* \gamma$ und $K_\kappa \gamma$ sind endliche Teilmengen von T .
 Die Elemente von $K_\kappa \gamma$ sind additive Hauptzahlen.
 (5) $L\xi \leq L\gamma$ für alle $\xi \in K_\kappa^* \gamma \cup K_\kappa \gamma$.
 (6) $S\gamma \leq \kappa \implies K_\kappa^* \gamma = \emptyset \wedge S\gamma \leq \{0\} \cup K_\kappa \gamma < \gamma + 1$.
 (7) $S\gamma \leq \kappa \wedge K_\kappa \gamma < \Theta\alpha\beta \implies \gamma < \Theta\alpha\beta$.
 (8) $K_\kappa \gamma < \kappa^+$.
 (9) $K_\kappa^{(*)} \eta \subset K_\kappa^{(*)} (\xi + \eta) \subset K_\kappa^{(*)} \xi \cup K_\kappa^{(*)} \eta$.
 (10) $K_\kappa^{(*)} \eta \subset K_\kappa^{(*)} g\xi\eta \subset K_\kappa^{(*)} \xi \cup K_\kappa^{(*)} \eta$.

Satz 1

Für $\gamma \in T$ und $\kappa \leq v$ gilt:

- a) $K_\kappa^* \gamma = K_v^* \gamma \cup K_\kappa^* (K_v \gamma)$.
 b) $K_\kappa \gamma = K_\kappa (K_v \gamma)$.

Beweis von a):

Induktion nach $L\gamma$: (Wegen $v_0 \leq v^+$ gilt: $S\gamma > v \rightarrow v_0 \leq \gamma$.)

1. $\gamma \in \{0\} \cup B(0) \wedge S\gamma \leq v$: klar.
 2. $\gamma \in \overline{NF} \gamma_1 + \dots + \gamma_n$: Aus der I.V. bzw. aus 1. folgt $K_\kappa^* \gamma_1 = K_v^* \gamma_1 \cup K_\kappa^* (K_v \gamma_1)$.
 Also gilt:
 $K_\kappa^* \gamma = \bigcup_{i=1}^n (K_v^* \gamma_i \cup K_\kappa^* (K_v \gamma_i)) = \bigcup_{i=1}^n K_v^* \gamma_i \cup K_\kappa^* (\bigcup_{i=1}^n K_v \gamma_i) = K_v^* \gamma \cup K_\kappa^* (K_v \gamma)$.
 3. $\gamma \in \overline{NF} \Theta\xi\eta \wedge S\gamma > v$:
 $K_\kappa^* \gamma = \{\xi\} \cup K_\kappa^* \xi \cup K_\kappa^* \eta \xrightarrow{\text{nach I.V.}} \{\xi\} \cup K_v^* \xi \cup K_\kappa^* (K_v \xi) \cup K_v^* \eta \cup K_\kappa^* (K_v \eta) =$
 $= K_v^* \gamma \cup K_\kappa^* (K_v \gamma) = K_v^* \gamma \cup K_\kappa^* (K_v \gamma)$.
 4. $\gamma \in \overline{NF} g\xi\eta > v$: wie bei 2.

Behauptung b) wird ähnlich wie a) bewiesen.

Satz 2

Ist $\gamma \in T$ und $v_0 \leq (S\beta)^+$, so gilt:

$$\gamma \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \iff K_{S\beta}^* \gamma < \alpha \wedge K_{S\beta} \gamma < \Theta\alpha\beta.$$

Beweis durch Induktion nach $L\gamma$ unter Berücksichtigung der Sätze 5, 10b) und 14b) aus §1.

Lemma 1

$S\beta = \kappa \leq \nu \wedge \gamma \in T \wedge \gamma \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \implies K_\nu \gamma \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) .$

Beweis mit den Sätzen 1 und 2 .

Satz 3

Sei $\gamma \in \overline{NF} \Theta \xi \eta \in T$ und $\nu_0 \leq (S\gamma)^+$; dann sind $\xi, \eta \in T$, und es gilt:

a) $K_{S\gamma}^* \xi < \xi \wedge K_{S\gamma} \xi \cup \{\eta\} < \gamma .$

b) Für $\xi < \alpha$ gilt: $K_{S\gamma} \xi \cup \{\eta\} < \Theta\alpha\beta \iff \gamma < \Theta\alpha\beta .$

Beweis:

Ist $\nu_0 \leq \gamma$, so $\xi, \eta \in T$ nach Def. von T. Ist $\gamma < \nu_0$, so $\xi, \eta \in T$ wegen $\xi \in C(\xi, \gamma)$ und $\eta < \gamma$.

a) folgt aus Satz 2 .

b) 1. Aus $\gamma < \Theta\alpha\beta$ folgt mit a) $K_{S\gamma} \xi \cup \{\eta\} < \Theta\alpha\beta$.

2. Sei $\xi < \alpha \wedge K_{S\gamma} \xi \cup \{\eta\} < \Theta\alpha\beta$, also $S\gamma \leq S\beta$. - Für $S\gamma < S\beta$

Beweis fertig. Ist $S\gamma = S\beta$, so folgt mit a) und Satz 2

$\xi < \alpha \wedge \xi \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \eta < \Theta\alpha\beta$, also nach §1, Satz 8 $\Theta\xi\eta < \Theta\alpha\beta$.

Satz 4

Sei $\gamma \in \overline{NF} \Theta \xi_1 \eta_1 \wedge \delta \in \overline{NF} \Theta \xi_2 \eta_2 \wedge S\gamma = S\delta = \nu \wedge \gamma, \delta \in T$;

$\gamma < \delta$ gilt genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle

vorliegt: (i) $\xi_1 < \xi_2 \wedge K_\nu \xi_1 \cup \{\eta_1\} < \delta$.

(ii) $\xi_1 = \xi_2 \wedge \eta_1 < \eta_2$.

(iii) $\xi_2 < \xi_1 \wedge \gamma \leq K_\nu \xi_2 \cup \{\eta_2\}$.

Beweis mit Satz 3 .

Bemerkung

Für $\nu_0 = 0$ ist $T = C(\Lambda_0, 0)$ (siehe §1, Satz 13a)) .

Jede Ordinalzahl $\gamma \in C(\Lambda_0, 0)$ lässt sich - wie aus der Definition von T und den Sätzen 2a), 10a), 14a) aus §1 hervorgeht - durch genau einen (aus den Zeichen 0, +, Θ , g zusammengesetzten) gemäss den Regeln (T1) - (T4) gebildeten Term $NF(\gamma)$, die sog. "Normalform von γ ", darstellen. Aus §1, Satz 12 und §2, Satz 4 folgt durch Induktion nach $L\gamma + L\delta$, dass " $\gamma < \delta$ " für alle $\gamma, \delta \in C(\Lambda_0, 0)$, deren Normalformen gegeben sind, entscheidbar ist. Das Problem der rekursiven Charakterisierung von $C(\Lambda_0, 0)$ reduziert sich also darauf, ein Verfahren zu finden, das für jeden beliebigen aus 0, +, Θ , g

zusammengesetzten Term entscheidet, ob er Element von $\{NF(\gamma) \mid \gamma \in C(\Lambda_0, 0)\}$ ist. Wir entwickeln im folgenden einen Algorithmus (siehe Satz 5, Hilfssatz 2), der es gestattet, die Normalform von $\mu[\gamma, \alpha, \beta]$ zu berechnen, falls die Normalformen von $\alpha, \beta, \gamma \in C(\Lambda_0, 0)$ gegeben sind. Daraus ergibt sich, wie auf den Seiten 20/21 näher ausgeführt ist, das gesuchte Entscheidungsverfahren.

Zur rekursiven Charakterisierung von $C(\Lambda_0, 0)$ hätte es genügt, die Definitionen und Sätze dieses Paragraphen auf den Fall $v_0 = 0$ zu beschränken. Die allgemeinere Formulierung $v_0 \in K_0$ wurde gewählt, um die Implikation $(\xi < \alpha \wedge \xi, \eta \in C(\alpha, \beta) \rightarrow \Theta \xi \eta \in C(\alpha, \beta))$ nicht nur für $\xi, \eta \in C(\Lambda_0, 0)$, sondern für beliebige $\xi, \eta \in ON$ beweisen zu können (siehe Beweis von Satz 6). Daraus folgt nämlich - zusammen mit §1, Satz 5 - , dass die hier definierten Funktionen $\Theta\alpha$ identisch sind mit den in [3] auf Seite 6 bezgl. $\mathcal{G} = \{g\}$ definierten Funktionen Θ_α .

Lemma 2

- a) $\gamma \in T \implies Sy \in T \wedge LSy \leq Ly \wedge (v_0 < \gamma \notin K \rightarrow LSy < Ly)$.
 b) $\gamma \in T \wedge \kappa < Sy \implies K_\kappa^{(*)} Sy \subset K_\kappa^{(*)} \gamma$.

Beweis durch Induktion nach Ly .

Definition von $p[\alpha, \gamma]$ für $\gamma \in T$

- $p[\alpha, \gamma] := 0$, wenn $\gamma = 0 \vee \gamma < v_0$.
- $p[\alpha, \gamma] := p[\alpha, \gamma_1]$, wenn $\gamma_{NF} \gamma_1 + \dots + \gamma_n > v_0$.
- Ist $\gamma_{NF} \Theta \xi \eta > v_0$, so sei

$$p[\alpha, \gamma] := \begin{cases} p[\alpha, \max(K_{Sy} \xi \cup \{\eta\})] & , \text{ wenn } \xi < \alpha \\ \eta & , \text{ wenn } \alpha \leq \xi \wedge \gamma < \Theta \alpha \gamma \\ \gamma & , \text{ wenn } \alpha \leq \xi \wedge \gamma = \Theta \alpha \gamma \end{cases}$$
- $p[\alpha, \gamma] := \gamma$, wenn $v_0 \leq \gamma \in K$.

Lemma 3

Ist $\gamma \in T$ und $v_0 \leq \gamma$, so gilt:

- $\gamma < \Theta \alpha 0 \implies p[\alpha, \gamma] = 0$.
- $\Theta \alpha \beta \leq \gamma < \Theta \alpha (\beta + 1) \implies p[\alpha, \gamma] = \beta$.
- $p[\alpha, \gamma] \in T \wedge Lp[\alpha, \gamma] \leq Ly \wedge Sy \leq p[\alpha, \gamma] \leq \gamma$.
- $\kappa < Sy \implies K_\kappa^{(*)} p[\alpha, \gamma] \subset K_\kappa^{(*)} \gamma$.
- $0 < \gamma < \Theta \alpha \gamma \implies Lp[\alpha, \gamma] < Ly$.

Beweis:

Beweis von a) - d) durch Induktion nach $L\gamma$:

Wir betrachten nur den Fall $\gamma_{NF} \ominus \xi \eta > v_0$.

1. $\xi < \alpha$:

Sei $\gamma_0 := \max(K_{S\gamma} \xi \cup \{\eta\})$. Es gilt $v_0 \leq \gamma_0 \in T \wedge L\gamma_0 < L\gamma \wedge S\gamma \leq \gamma_0 < \gamma \wedge p[\alpha, \gamma] = p[\alpha, \gamma_0]$. Die Behauptungen a) und c) folgen also direkt aus der Induktionsvoraussetzung.

zu b): $\Theta\alpha\beta \leq \gamma < \Theta\alpha(\beta+1) \wedge \xi < \alpha$ [mit Satz 3b)] $\implies$

$$\implies \Theta\alpha\beta \leq \gamma_0 < \Theta\alpha(\beta+1) \quad [\text{mit I.V.}] \implies p[\alpha, \gamma_0] = \beta .$$

zu d): $\kappa < S\gamma = S\gamma_0$ [mit I.V. und Satz 1)] $\implies$

$$\implies K_{\kappa}^{(*)} p[\alpha, \gamma] = K_{\kappa}^{(*)} p[\alpha, \gamma_0] \subset K_{\kappa}^{(*)} \gamma_0 \subset K_{\kappa}^{(*)} \xi \cup K_{\kappa}^{(*)} \eta \subset K_{\kappa}^{(*)} \gamma .$$

2. $\alpha \leq \xi$:

Es ist $p[\alpha, \gamma] \in \{\eta, \gamma\}$ und $\Theta\alpha 0 \leq \gamma$. Die Behauptungen a), c), d) sind also trivial.

zu b): Aus $\alpha \leq \xi \wedge \Theta\alpha\beta \leq \gamma < \Theta\alpha(\beta+1)$ folgt mit §1, L4 $\Theta\alpha\beta = \gamma$.

$$\Theta\alpha\beta = \gamma < \Theta\alpha\gamma \implies \beta, \eta < \Theta\alpha\beta = \Theta\xi\eta \quad [\text{mit §1, L5}] \implies \beta = \eta = p[\alpha, \gamma] .$$

$$\Theta\alpha\beta = \gamma = \Theta\alpha\gamma \implies \beta = \gamma = p[\alpha, \gamma] .$$

Beweis von e): $0 < \gamma < \Theta\alpha\gamma \wedge v_0 \leq \gamma \implies \gamma \notin K \wedge v_0 < \gamma < \Theta\alpha\gamma$

$\implies p[\alpha, \gamma] = p[\alpha, \gamma_1]$ für ein $\gamma_1 \in T$ mit $L\gamma_1 < L\gamma$ [mit c)] $\implies$ Beh.

Definition von $q[\alpha, \gamma]$ (Def. durch transf. Ind. nach γ)

1. $q[\alpha, 0] := 0$.

2. $q[\alpha, \gamma] := q[\alpha, S\gamma]$, wenn $\gamma \notin K_0$.

3. Ist $\gamma = g\xi\eta$ mit $\eta < \gamma$, so sei

$$q[\alpha, \gamma] := \begin{cases} q[\alpha, \eta] & , \text{ wenn } \xi < \alpha \\ \eta & , \text{ wenn } \xi = \alpha \\ \gamma & , \text{ wenn } \alpha < \xi \end{cases} .$$

(Aus §1, Sätze 13c), 14a) folgt $\forall \gamma \in K_1 \xi_1 \eta (\gamma = g\xi\eta \wedge \eta < \gamma)$.)

Definition: Für $\gamma \in T$ sei $K_{\kappa}\gamma := \{\xi \mid \xi \leq \{0\} \cup K_{\kappa}\gamma\}$.

Folgerung: $K_{\kappa}\gamma \subset K_{\kappa}\gamma \wedge (K_{\kappa}\gamma < \Theta\alpha\beta \rightarrow K_{\kappa}\gamma < \Theta\alpha\beta)$.

Lemma 4

a) $\gamma < g\alpha 0 \implies q[\alpha, \gamma] = 0$.

b) $g\alpha\beta \leq \gamma < g\alpha(\beta+1) \implies q[\alpha, \gamma] = \beta$.

c) $\gamma \in T \implies q[\alpha, \gamma] \in T \wedge Lq[\alpha, \gamma] \leq L\gamma$.

$$d) \gamma \in T \implies K_{\kappa}^* q[\alpha, \gamma] \subseteq K_{\kappa}^* \gamma \wedge K_{\kappa} q[\alpha, \gamma] \subseteq K_{\kappa} \gamma.$$

$$e) \gamma \in T \wedge v_0 \leq \gamma \wedge 0 < \gamma < g\alpha\gamma \implies Lq[\alpha, \gamma] < L\gamma.$$

Beweis:

Beweis von a) und b) durch transf. Ind. nach γ mit Hilfe von §1, Satz 12. Beweis von c) und d) durch Induktion nach $L\gamma$.

zu d): Für $S\gamma \leq \kappa$ gilt (wegen $q[\alpha, \gamma] \leq S\gamma$) $K_{\kappa}^* q[\alpha, \gamma] = \emptyset$ und
 $\forall \sigma (\sigma \in K_{\kappa} q[\alpha, \gamma] \rightarrow \sigma \leq S\gamma \leq \{0\} \cup K_{\kappa} \gamma)$, also $K_{\kappa} q[\alpha, \gamma] \subseteq K_{\kappa} \gamma$.

Beweis von e):

Sei $0 < \gamma < g\alpha\gamma \wedge v_0 \leq \gamma \in T$:

1. Für $S\gamma < \gamma$ ist $v_0 < \gamma \notin K$, also nach L2 $Lq[\alpha, \gamma] \leq LS\gamma < L\gamma$.
2. Für $0 < S\gamma = \gamma$ ist $\gamma \not\models g\xi\eta$ mit $\eta \in T \wedge L\eta < L\gamma$. Aus $g\xi\eta < g\alpha(g\xi\eta)$ folgt $\xi \leq \alpha$, also $q[\alpha, \gamma] \in \{q[\alpha, \eta], \eta\}$ und somit $Lq[\alpha, \gamma] \leq L\eta$.

Lemma 5

$$\eta^* \leq \mu[\eta, \alpha, \beta] \implies \Theta\xi\eta^* \leq \mu[\Theta\xi\eta, \alpha, \beta].$$

Beweis: indirekt.

O.E.d.A. $v_0 = (S\beta)^+$.

Annahme: Es gibt ein $\gamma \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$ mit $\Theta\xi\eta \leq \gamma < \Theta\xi\eta^*$.

Dann existiert ein η_0 mit $\eta \leq \eta_0 < \eta^* \wedge \Theta\xi\eta_0 \leq \gamma < \Theta\xi(\eta_0 + 1)$.

Ist $\gamma < \Theta\alpha\beta$, so $\mu[\eta, \alpha, \beta] = \eta$ und $\Theta\xi\eta = \mu[\Theta\xi\eta, \alpha, \beta]$.

Ist $\Theta\alpha\beta \leq \gamma$, so nach §1, Satz 5 $S\beta < S\gamma$, folglich $v_0 \leq \gamma \in T$.

Mit L3 erhält man $\eta_0 = p[\xi, \gamma] \in T$ und $K_{S\beta}^{(*)} \eta_0 \subseteq K_{S\beta}^{(*)} \gamma$.

Daraus folgt mit Satz 2 $\eta_0 \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$, also $\mu[\eta, \alpha, \beta] < \eta^*$.

Lemma 6

$$\eta^* \leq \mu[\eta, \alpha, \beta] \implies g\xi\eta^* \leq \mu[g\xi\eta, \alpha, \beta].$$

Beweis wie bei Lemma 5.

Lemma 7

$$a) \gamma \in T \implies (S\gamma)^+ \in T \wedge (v_0 \leq \gamma \not\models \Theta\xi\eta \rightarrow L(S\gamma)^+ \leq L\gamma).$$

$$b) \gamma \in T \wedge \kappa \leq S\gamma \implies K_{\kappa}^*(S\gamma)^+ \subseteq K_{\kappa}^* \gamma \wedge K_{\kappa}(S\gamma)^+ \subseteq \{1\} \cup K_{\kappa} \gamma.$$

$$c) 1, \gamma \in C(\alpha, \beta) \wedge S\beta \leq S\gamma \implies (S\gamma)^+ \in C(\alpha, \beta).$$

Beweis:

$$1. S\gamma = 0 \wedge (S\gamma)^+ = g00 : \text{klar.}$$

$$2. S\gamma \not\models g0\tau \wedge (S\gamma)^+ \not\models g0(\tau+1) :$$

$$a) S\gamma \in T \implies \tau \in T \implies (S\gamma)^+ \in T.$$

$$v_0 \leq \gamma \not\models \Theta\xi\eta \text{ [mit L2]} \implies L(S\gamma)^+ = L(\tau+1)+1 \leq L\tau+2 = LS\gamma+1 \leq L\gamma.$$

$$b) \text{ Für } \kappa \leq S\gamma \text{ ist } K_{\kappa}^*(S\gamma)^+ = K_{\kappa}^* \tau = K_{\kappa}^* S\gamma \subseteq K_{\kappa}^* \gamma \text{ und } K_{\kappa}(S\gamma)^+ = \{1\} \cup K_{\kappa} \tau.$$

$$\kappa < S\gamma \implies K_{\kappa} \tau \subseteq K_{\kappa} S\gamma \subseteq K_{\kappa} \gamma,$$

$$\kappa = S\gamma \implies K_{\kappa} \tau < S\gamma \leq \{0\} \cup K_{\kappa} \gamma \implies K_{\kappa} \tau \subseteq K_{\kappa} \gamma.$$

c) $1, \gamma \in C(\alpha, \beta) \wedge S\beta \leq S\gamma \implies 1, S\gamma \in C(\alpha, \beta) \wedge \beta < (S\gamma)^+ \implies$
 [mit §1, Satz 14b)] $\implies (S\gamma)^+ \in C(\alpha, \beta)$.

3. $S\gamma = gOS\gamma \wedge (S\gamma)^+ \stackrel{NF}{=} gO(S\gamma+1)$:

zu a) $v_0 \leq \gamma \stackrel{NF}{=} \theta\xi\eta \implies v_0 < \eta \nmid K \wedge L\eta < L\gamma$ [mit L2] $\implies$
 $\implies L(S\gamma)^+ \leq LS\gamma + 2 = LS\eta + 2 \leq L\eta + 1 \leq L\gamma$.

zu b) Für $\kappa \leq S\gamma$ ist $K_\kappa^*(S\gamma)^+ = K_\kappa^*S\gamma \subset K_\kappa^*\gamma$ und $K_\kappa(S\gamma)^+ = \{1\} \cup K_\kappa S\gamma$
 und $K_\kappa S\gamma \subset K_\kappa \gamma$.

Ansonsten wie bei 2.

Satz 5

Ist $0 < \alpha \wedge v_0 \leq \beta \nmid K \wedge \gamma \in T$, so gilt:

a) $\mu[\gamma, \alpha, \beta] \in T$.

b) $L\mu[\gamma, \alpha, \beta] \leq L\gamma$.

c) $\kappa \leq S\beta \implies K_\kappa^*\mu[\gamma, \alpha, \beta] \subset \alpha \cup K_\kappa^*\gamma$,
 $K_\kappa\mu[\gamma, \alpha, \beta] \subset \{1\} \cup K_\kappa \gamma$.

Beweis:

Beweis durch Induktion nach $L\gamma$.

I.V. : Satz 5 gilt für alle $\gamma \in T$ mit $L\gamma < i$.

Hilfssatz 1

Ist $\xi, \eta \in T$ und $L\xi < i$, so gilt :

(1) $\theta\xi\eta \in T$. (2) $L\theta\xi\eta \leq \max\{L\xi, L\eta\} + 1$.

(3) $\xi < \alpha \wedge \xi \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) \wedge \beta \leq \eta \implies K_\kappa^*\theta\xi\eta \subset \alpha \cup K_\kappa^*\xi \cup K_\kappa^*\eta$.
 $\kappa < S\eta \implies K_\kappa\theta\xi\eta \subset \{1\} \cup K_\kappa\xi \cup K_\kappa\eta$.

(4) $\xi < \alpha \wedge \xi, \eta \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) \wedge v_0 \leq (S\beta)^+ \implies \theta\xi\eta \in C(\alpha, \theta\alpha\beta)$.

Beweis von Hilfssatz 1 :

(*) : $\xi < \alpha \wedge \xi, \eta \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) \wedge S\eta \leq S\beta$ [mit §1, Satz 5] $\implies$
 $\implies \xi < \alpha \wedge \xi \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) \wedge \eta < \theta\alpha\beta$ [mit §1, Satz 8] $\implies$
 $\implies \theta\xi\eta < \theta\alpha\beta$.

I. $\eta < v_0$:

Es gilt $\theta\xi\eta < v_0 \wedge S\eta \leq \kappa \wedge (v_0 \leq (S\beta)^+ \rightarrow S\eta \leq S\beta)$, also sind
 die Beh. (1) - (3) trivial, und Beh. (4) folgt mit (*).

II. $\theta\xi\eta = \eta$: trivial.

III. $v_0 \leq \eta < \delta := \theta\xi\eta$:

Aus $\xi \in T$ folgt $\xi < Gv_0 \leq G\eta$, also existiert $\xi_1 := \mu[\xi, \xi, \eta]$,
 und nach §1, L7 ist $\delta \stackrel{NF}{=} \theta\xi_1\eta$.

Für $\xi = 0$ ist $\delta \stackrel{NF}{=} \theta\xi\eta$ und die Behauptungen (1)-(4) sind trivial.

Ist $0 < \xi$, so folgt aus I.V.

$\xi_1 \in T \wedge L\xi_1 \leq L\xi \wedge K_{\kappa}^* \xi_1 \subset \xi \cup K_{\kappa}^* \xi \wedge K_{\kappa} \xi_1 \subset \{1\} \cup K_{\kappa} \xi$ (für $\kappa \leq S\eta$).

Daraus folgen die Behauptungen (1) - (3) nach Definition zu (4): Sei $\xi < \alpha \wedge \xi, \eta \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge v_0 \leq (S\beta)^+$. (und §1, L8)

Für $S\eta \leq S\beta$ gilt $\Theta\xi\eta \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$ nach (*).

Für $S\beta < S\eta$ folgt $\Theta\xi\eta \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$ aus (3) und §2, Satz 2.

Sei nun $0 < \alpha \wedge v_0 \leq \beta \notin K \wedge \gamma \in T \wedge L\gamma \leq i$.

Abkürzung: Für $\zeta \in T$ sei $\zeta^* := \mu[\zeta, \alpha, \beta]$.

(Wegen $v_0 \leq \beta$ ist $\mu[\zeta, \alpha, \beta]$ für alle $\zeta \in T$ definiert.)

Hilfssatz 2

(1) $\gamma = 0 \vee \gamma < \beta \implies \gamma^* = \gamma$.

(2) Ist $\beta \leq \gamma_{NF} \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, so gilt:

$$\gamma^* = \begin{cases} \gamma & , \text{ wenn } \gamma_j = \gamma_j^* \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \\ \gamma_1^* & , \text{ wenn } \gamma_1 \neq \gamma_1^* \end{cases}$$

$$\gamma^* \overset{NF}{\leq} \gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1} + \gamma_k^* , \text{ wenn } 1 < k := \min\{j \mid \gamma_j \neq \gamma_j^*\} .$$

(3) Ist $\beta \leq \gamma_{NF} \Theta\xi\eta$, so gilt:

(3.1) $\gamma \leq \eta^* \implies \gamma^* = \eta^*$.

(3.2) $\eta^* < \gamma \wedge \alpha \leq \xi^* \implies \gamma^* = \begin{cases} \gamma & , \text{ wenn } \xi \leq \mu[\alpha, \xi, \eta] \wedge \eta < \beta \\ (S\gamma)^+ & , \text{ sonst} \end{cases}$

(3.3) $\eta^* < \gamma \wedge \xi^* < \alpha \wedge \eta_0 := p[\xi^*, \max(K_{S\gamma} \xi \cup \{\eta\})] \implies$

$$\implies \gamma^* = \begin{cases} \Theta\xi\eta^* & , \text{ wenn } \xi = \xi^* \\ \Theta\xi^*\eta_0^* & , \text{ wenn } \xi \neq \xi^* \wedge \eta_0 \neq \eta_0^* \\ \Theta\xi^*(\eta_0+1) & , \text{ wenn } \xi \neq \xi^* \wedge \eta_0 = \eta_0^* \end{cases} .$$

(4) Ist $\beta < \gamma_{NF} g\xi\eta$, so gilt:

(4.1) $\xi = \xi^* \implies \gamma^* = g\xi\eta^*$.

(4.2) $\xi \neq \xi^* \wedge \gamma < g\xi^*0 \implies \gamma^* = g\xi^*0$.

(4.3) $\xi \neq \xi^* \wedge g\xi^*0 < \gamma \wedge \eta_0 := q[\xi^*, \eta] \implies$

$$\implies \gamma^* = \begin{cases} g\xi^*\eta_0^* & , \text{ wenn } \eta_0 \neq \eta_0^* \\ g\xi^*(\eta_0+1) & , \text{ wenn } \eta_0 = \eta_0^* \end{cases} .$$

Beweis von Hilfssatz 2 :

(1) klar .

(2) Sei $\gamma_{NF} \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ mit $1 < k := \min\{j \mid \gamma_j \neq \gamma_j^*\}$.

Sei $\gamma' := \gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1} + \gamma_k^*$. Dann ist $\gamma_k < \gamma_{k-1} \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$,

also $\gamma_k < \gamma_k^* \leq \gamma_{k-1}$. Offensichtlich ist mit γ_k auch γ_k^* add.

Hauptzahl. Für $1 \leq j < k$ ist $\gamma_j = \gamma_j^* \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$. Somit gilt

$\gamma < \gamma' \text{ NF } \gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1} + \gamma_k^* \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$, also $\gamma^* \leq \gamma'$.

Aus $\forall \xi (\gamma \leq \xi < \gamma' \rightarrow \exists \xi_0 (\xi = \gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1} + \xi_0 \wedge \gamma_k \leq \xi_0 < \gamma_k^*))$ und
 $\forall \xi_0 (\xi_0 \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \rightarrow \gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1} + \xi_0 \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta))$ folgt $\gamma' \leq \gamma^*$.

(3.1) klar.

(3.2) Aus $\alpha \leq \xi^* \wedge \beta \leq \gamma$ folgt nach §1, Satz 8 :

$$\xi \leq \mu[\alpha, \xi, \eta] \wedge \eta < \beta \quad (==) \quad \gamma < \Theta\alpha\beta.$$

$$\begin{aligned} \eta^* < \gamma \wedge 0 < \alpha &==> S\gamma = S\eta^* \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge 1 < \Theta\alpha\beta \quad [\text{mit L7}] ==> \\ &==> (S\gamma)^+ \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta). \end{aligned}$$

$$\alpha \leq \xi^* \wedge \Theta\alpha\beta \leq \gamma \quad [\text{mit §1, Satz 10b}] ==> \gamma \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta).$$

$$(S\gamma)^+ \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \gamma \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \alpha \leq \xi^* \quad [\text{mit §1, L9}] ==> \gamma^* = (S\gamma)^+.$$

(3.3) Es gilt $\xi, \eta \in T \wedge \max\{L\xi, L\eta\} < L\gamma \leq i$, also nach I.V.

$$\xi^*, \eta^* \in T \wedge \max\{L\xi^*, L\eta^*\} < L\gamma.$$

1. $\xi = \xi^*$:

Es gilt $\xi < \alpha \wedge \xi \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$, somit nach HS 1(4) $\Theta\xi\eta^* \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$.

Daraus folgt mit L5 $\gamma^* = \Theta\xi\eta^*$.

2. $\xi \neq \xi^*$:

Es gilt $\xi < \alpha \wedge \xi \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \beta \notin K$, also (wegen $\xi \in C(\xi, \gamma)$)
 $\Theta\alpha\beta < \gamma$, folglich $\gamma \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$ (wegen $\xi \neq \xi^*$ u. §1, Satz 10b).

$$\begin{aligned} \xi < \xi^* < \alpha \wedge \Theta\alpha\beta < \gamma &==> \eta_0 = p[\xi^*, \gamma] \wedge \Theta\xi^*0 < \gamma \quad [\text{mit L3}] ==> \\ &==> \Theta\xi^*\eta_0 \leq \gamma < \Theta\xi^*(\eta_0+1). \end{aligned}$$

$$L3 ==> \eta_0 \in T \wedge L\eta_0 < L\gamma \quad [\text{mit I.V. u. HS 1(4)}] ==>$$

$$==> \Theta\xi^*\eta_0^*, \Theta\xi^*(\eta_0^*+1) \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta).$$

$$\eta_0 < \eta_0^* ==> \Theta\xi^*\eta_0 \leq \gamma < \Theta\xi^*\eta_0^* \quad [\text{mit L5}] ==> \gamma^* = \Theta\xi^*\eta_0^*.$$

$$\eta_0 = \eta_0^* \quad [\text{wegen } \Theta\xi^*\eta_0^* \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \wedge \gamma \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta)] ==>$$

$$==> \Theta\xi^*\eta_0 < \gamma < \Theta\xi^*(\eta_0+1) \quad [\text{mit §1, L10}] ==> \gamma^* = \Theta\xi^*(\eta_0+1).$$

zu (4):

Aus $\xi \neq \xi^*$ folgt $\gamma \notin C(\alpha, \Theta\alpha\beta)$ (nach §1, Satz 14b) und

$q[\xi^*, \gamma] = q[\xi^*, \eta] = \eta_0$. Wegen $\beta \notin K$ gilt $(\sigma, \tau \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta) \rightarrow g\sigma\tau \in C(\alpha, \Theta\alpha\beta))$.

(4.1) folgt aus L6.

(4.2) folgt aus §1, L11(ii).

(4.3) folgt (ähnlich wie (3.3)) aus L4 und L6 bzw. §1, L11(i).

Die Behauptungen a), b), c) des Satzes ergeben sich nun ohne Schwierigkeit aus I.V., HS 1, HS 2, L3, L4, L7.

zu (3.3): Ist $S\beta = S\gamma$, so muss (wegen $\eta^* < \gamma$) $\eta = \eta^* < \Theta\alpha\beta$ sein.

Mit $\xi^* < \alpha$ folgt daraus (nach §1, Satz 8) $\gamma = \Theta\xi\eta < \Theta\alpha\beta$. Wir haben

nur noch den Fall $S\beta < S\gamma$ zu betrachten.

Sei $\xi_0 := \max(K_{S\gamma} \xi \cup \{\eta\})$, also $\eta_0 = p[\xi^*, \xi_0]$. Mit Satz 3a) folgt $0 < S\gamma < \eta \leq \xi_0 < \gamma \leq \Theta\xi^* \xi_0$ und daraus (mit L3e) $L\eta_0 < L\xi_0 < L\gamma$, somit $L(\eta_0+1) < L\gamma$.

zu (4.3): Aus $\xi \neq \xi^*$ folgt $\nu_0 < \xi$, also $1 \leq L\xi < L\gamma$.

Für $\eta=0 \vee \eta < \nu_0$ gilt (wegen $\eta_0 = q[\xi^*, \eta] \leq \eta$) $L(\eta_0+1) \leq 1 < L\gamma$.

Für $\nu_0 \leq \eta \neq 0$ ist $0 < \eta < g\xi^* \eta$ und deshalb (nach L4e) $L\eta_0 < L\eta < L\gamma$, also $L(\eta_0+1) < L\gamma$.

Satz 6

$$\xi < \alpha \wedge \xi, \eta \in C(\alpha, \beta) \implies \Theta\xi\eta \in C(\alpha, \beta).$$

Beweis:

Aus §1, L1 folgt $\beta_0 (C(\alpha, \beta) = C(\alpha, \Theta\alpha\beta_0))$.

O.E.d.A. $\nu_0 = (S\beta_0)^+$, also $C(\alpha, \Theta\alpha\beta_0) \subset T$.

Die Behauptung folgt nun aus Satz 5, HS 1(4).

Lemma 8

Für $\xi, \eta \in C(\Lambda_0, 0)$ und $\gamma = \Theta\xi\eta$ gilt:

$$a) \quad \eta = \gamma \iff \eta \in K \vee (\eta \notin K \wedge \mu[\xi, \sigma, \tau] < \sigma) \quad .$$

$$b) \quad \eta < \gamma \iff \gamma \notin K \wedge \mu[\xi, \xi, \eta] \eta \quad .$$

Beweis:

$$a) \quad \gamma = \eta \notin K \quad [\text{wegen } \eta \in C(\Lambda_0, 0)] \implies \eta \notin K \wedge \neg(\Theta\sigma\tau < \Theta\xi\eta) \implies \\ [\text{mit §1, Satz 8}] \implies \mu[\xi, \sigma, \tau] < \sigma \quad .$$

$$\mu[\xi, \sigma, \tau] < \sigma \quad [\text{mit §1, Satz 4}] \implies \Theta\xi(\Theta\sigma\tau) = \Theta\sigma\tau \quad .$$

$$b) \quad \xi \in C(\Lambda_0, 0) \implies \xi < \Lambda_0 \leq G\eta \quad [\text{mit §1, L7}] \implies \text{Behauptung.}$$

Die rekursive Charakterisierung von $C(\Lambda_0, 0)$

Sei $\nu_0 = 0$, also $T = C(\Lambda_0, 0)$.

Abkürzungen:

Für $\gamma \in T$ sei $NF(\gamma)$ die gemäss Seite 13, unten definierte Normalform von γ .

$$\gamma \in T^* \iff \gamma \in T \text{ und } NF(\gamma) \text{ ist gegeben bzw. berechenbar.}$$

$$A(i) \iff \forall \alpha, \beta, \gamma \in T^* (2^{L\alpha+2^{L\gamma}} < 1 \wedge 0 < \alpha \wedge \beta \notin K \rightarrow \mu[\gamma, \alpha, \beta] \in T^*) \quad .$$

$$B(i) \iff \forall \xi, \zeta \in T^* (2^{L\xi+2^{L\zeta}} < 1 \rightarrow p[\xi, \zeta] \in T^*) \quad .$$

$$C(i) \iff \forall \xi, \eta \in T^* (2^{\max\{L\xi, L\eta\}+1} < 1 \rightarrow \Theta\xi\eta \in T^*) \quad .$$

Wie schon auf Seite 13 erwähnt wird, ist $\gamma < \delta$ für alle $\gamma, \delta \in T^*$ entscheidbar; und offensichtlich gilt:

$$\alpha, \gamma \in T^* \implies q[\alpha, \gamma] \in T^* \quad .$$

Aus L8 folgt: $A(1) \implies B(1) \wedge C(1)$.

Aus Satz 5, HS2 folgt: $A(1) \wedge B(1) \wedge C(1) \implies A(i+1)$.

Durch Induktion nach i erhält man nun:

$$\alpha, \beta \in T^* \implies \Theta \alpha \beta \in T^*.$$

Wie leicht einzusehen ist, gilt auch:

$$\alpha, \beta \in T^* \implies \alpha + \beta, g\alpha\beta \in T^*.$$

Für jede durch $0, +, \Theta, g$ dargestellte Ordinalzahl kann man also (mit Hilfe der Gleichungen von Satz 5, HS2 und L8) die zugehörige Normalform berechnen. Insbesondere kann man so entscheiden, ob ein vorgelegter Term eine Normalform ist oder nicht.

§ 3 Das rekursive Bezeichnungssystem $\bar{\Theta}(\{g\})$

=====

Das im folgenden eingeführte Bezeichnungssystem $\bar{\Theta}(\{g\})$ steht in engem Zusammenhang mit den Funktionen $\Theta\alpha$ und wird sich als ordnungsisomorph zur Ordinalzahlenmenge $C(\Lambda_0, 0)$ erweisen. Es hat gegenüber der rekursiven Charakterisierung aus §2 den Vorteil, einfacher definiert zu sein und sich deshalb im allgemeinen leichter handhaben zu lassen.

Ein konstruktiver Wohlordnungsbeweis für $\bar{\Theta}(\{g\})$ wird nicht geführt.

Definition von $\bar{\Theta}(\{g\})$

=====

Wir definieren gleichzeitig:

1. Termengen $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$.
2. Eine Abbildung $S: \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{K}\{0\}$.
3. Koeffizientenmengen K_u^*a und $K_u a$.
4. Eine binäre Relation $<$ auf $\mathfrak{I}$.

Das Paar $(\mathfrak{I}, <)$ bezeichnen wir mit $\bar{\Theta}(\{g\})$.

Abkürzungen:

$$a \in \bar{\Theta}(\{g\}) : \iff a \in \mathfrak{I}.$$

$$a = b : \iff \text{Die Terme } a \text{ und } b \text{ sind identisch.}$$

$$a < b : \iff \neg(b < a).$$

$$\mathfrak{K}_0 := \mathfrak{K}\{0\}.$$

Die Buchstaben a, b, c, d, x, y (auch mit Indizes) seien Mitteilungs-

zeichen für Terme von $\overline{\Theta}(\{g\})$. Die Buchstaben u, v seien Mittelungszeichen für Terme von $\mathfrak{R}_0$.

Für eine Termmenge M sei $M < a$ und $a \leq M$ wie auf Seite 11 definiert.

1. Definition von $\mathfrak{I}, \mathfrak{G}, \mathfrak{R}$

1.1. $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{G} \subset \mathfrak{I}$.

1.2. $0 \in \mathfrak{I}$.

1.3. $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{G} \wedge n \geq 2 \wedge a_n \leq \dots \leq a_1 \implies a_1 + \dots + a_n \in \mathfrak{I}$.

1.4. $a, b \in \mathfrak{I} \wedge K_{Sb}^* a < a \implies (a, b) \in \mathfrak{G}$.

1.5. $a, b \in \mathfrak{I} \implies [a, b] \in \mathfrak{R}$.

2. Definition von $Sa \in \mathfrak{R}_0$ für $a \in \mathfrak{I}$

2.1. $Sa := a$, wenn $a \in \mathfrak{R}_0$.

2.2. $S(a_1 + \dots + a_n) := Sa_1$.

2.3. $S(a, b) := Sb$.

3. Definition von $K_u^* a$ und $K_u a$ für $a \in \mathfrak{I}$ und $u \in \mathfrak{R}_0$

3.1. $K_u^* 0 := K_u 0 := \emptyset$

3.2. $K_u^* a := \emptyset$ und $K_u a := \{a\}$, wenn $a \in \mathfrak{G} \wedge Sa \leq u$.

3.3. $K_u^{(*)}(a_1 + \dots + a_n) := K_u^{(*)} a_1 \cup \dots \cup K_u^{(*)} a_n$.

3.4. $K_u^*(a, b) := \{a\} \cup K_u^* a \cup K_u^* b$ und

$K_u(a, b) := K_u a \cup K_u b$, wenn $u < Sb$.

3.5. $K_u^{(*)}[a, b] := K_u^{(*)} a \cup K_u^{(*)} b$, wenn $u < [a, b]$.

4. Definition von $c < d$ für $c, d \in \mathfrak{I}$

4.1. $c \in \mathfrak{R} \wedge d = (a, b) \wedge c \leq b \implies c < d$.

4.2. $c = (a, b) \wedge d \in \mathfrak{R} \wedge b < d \implies c < d$.

4.3. $c = (a_1, b_1) \wedge d = (a_2, b_2) \wedge Sb_1 < Sb_2 \implies c < d$.

4.4. Ist $c = (a_1, b_1) \wedge d = (a_2, b_2) \wedge Sb_1 = Sb_2 = u$,
so gilt $c < d$ genau dann, wenn einer der folgenden
drei Fälle vorliegt:

(i) $a_1 < a_2 \wedge K_u a_1 \cup \{b_1\} < d$.

(ii) $a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2$.

(iii) $a_2 < a_1 \wedge c \leq K_u a_2 \cup \{b_2\}$.

4.5. Ist $c = [a_1, b_1]$ und $d = [a_2, b_2]$, so gilt $c < d$ genau dann,
wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

(i) $a_1 < a_2 \wedge b_1 < d$.

(ii) $a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2$.

(iii) $a_2 < a_1 \wedge c \leq b_2$.

4.6. Für $c \notin \mathfrak{G}$ oder $d \notin \mathfrak{G}$ wird $c < d$ in üblicher Weise
definiert.

Definition von L_a

1. $L_0 := 0$.
2. $L(a_1 + \dots + a_n) := L_{a_1} + \dots + L_{a_n}$.
3. $L(a, b) := L[a, b] := \max\{L_a, L_b\} + 1$.

Folgerung: $0 \neq a \in \mathbb{I} \implies 1 \leq L_a$.
 $a_1 + \dots + a_n \in \mathbb{I} \wedge n \geq 2 \implies L_{a_1}, \dots, L_{a_n} < L(a_1 + \dots + a_n)$.

Satz 1

$(\mathbb{I}, <)$ ist eine lineare Ordnung, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{I}$ gilt:

- a) $\neg(a < a)$.
- b) $a \neq b \implies a < b \vee b < a$.
- c) $a < b \wedge b < c \implies a < c$.

Man beweist a) durch Induktion nach L_a , b) durch Induktion nach $L_a + L_b$ und c) durch Induktion nach $L_a + L_b + L_c$.

Lemma 1

- a) $Sa \leq a$.
- b) $Sa < Sb \implies a < b$.

Beweis:

- a) Induktion nach L_a .
- b) Man zeigt durch Induktion nach L_a : $Sa < Sb \rightarrow a < Sb$.
 Daraus folgt mit Satz 1 und L1a) die Behauptung.

Satz 2

- a) $\forall x (x \in K_u a \rightarrow x \in \mathbb{I} \wedge x \leq a \wedge Sx \leq u)$.
- b) $Sa \leq u \implies K_u^* a = \emptyset \wedge Sa \leq \{0\} \cup K_u a$.
- c) $Sa \leq u \wedge c \in \mathbb{I} \wedge K_u a < c \implies a < c$.
- d) $u \leq v \implies K_u^* a = K_v^* a \cup K_u^*(K_v a)$ und
 $K_u a = K_u(K_v a)$.

Beweis klar. Siehe auch Seite 12 .

Lemma 2

- a) $(a, b) \in \mathbb{I} \implies K_{Sb} a \cup \{b\} < (a, b)$.
- b) $a < [a, b] \wedge b < [a, b]$.

Beweis:

- a) Man zeigt durch Induktion nach L_c :
 $\forall (a, b) \in \mathbb{I} \forall c \in \mathbb{I} (c \leq K_{Sb} a \cup \{b\} \implies c < (a, b))$.
- b) Man zeigt durch Induktion nach L_c :
 $\forall a, b, c \in \mathbb{I} (c \leq a \vee c \leq b \implies c < [a, b])$.

Die folgenden Definitionen und Lemmata sind Hilfsmittel für den Beweis der Ordnungsisomorphie von $\overline{\Theta}(\{g\})$ und $C(\Lambda_0, 0)$.

Definition von $s[\alpha, \gamma]$ für $\gamma \in C(\Lambda_0, 0)$

1. $s[\alpha, 0] := 0$.
2. $s[\alpha, \gamma] := \max\{s[\alpha, \gamma_1], \dots, s[\alpha, \gamma_n]\}$, wenn $\gamma_{\overline{NF}} \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.
3. Ist $\gamma_{\overline{NF}} \Theta \xi \eta$, so sei

$$s[\alpha, \gamma] := \begin{cases} S\gamma & , \text{ wenn } \alpha \leq \{\xi\} \cup K_{S\gamma}^* \xi \\ \max\{s[\alpha, \xi], s[\alpha, \eta]\} & , \text{ sonst } . \end{cases}$$
4. $s[\alpha, \gamma] := \max\{s[\alpha, \xi], s[\alpha, \eta]\}$, wenn $\gamma_{\overline{NF}} g \xi \eta$.

Lemma 3

Für $\gamma \in C(\Lambda_0, 0)$ gilt:

- a) $s[\alpha, \gamma] \in K_0 \cap C(\Lambda_0, 0) \wedge s[\alpha, \gamma] \leq S\gamma$.
- b) $s[\alpha, \gamma] = \min\{v \mid v \in K_0 \wedge K_v^* \gamma < \alpha\}$.
- c) $s[\alpha, \gamma] \leq \{0\} \cup K_{s[\alpha, \gamma]} \gamma$.

Beweis durch Induktion nach $I\gamma$:

zu b): Aus §2, Satz 1a) folgt: $\kappa \leq v \rightarrow K_v^* \gamma \subset K_\kappa^* \gamma$.

zu c): Es gilt $S\gamma \leq \{0\} \cup K_{S\gamma} \gamma$. Ist $\kappa := s[\alpha, \gamma] < S\gamma$ und

$\gamma_{\overline{NF}} \Theta \xi \eta$, so gilt nach Definition $\kappa = \max\{s[\alpha, \xi], s[\alpha, \eta]\}$ und deshalb nach I.V. $\kappa \leq \{0\} \cup K_\kappa \xi \cup K_\kappa \eta = \{0\} \cup K_\kappa \gamma$.

Definition

Für $\alpha \in C(\Lambda_0, 0)$ sei

$$s[\alpha] := s[\alpha, \alpha] .$$

$$\mu[\alpha] := \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } s[\alpha] = 0 \wedge K_0 \alpha < \Theta \alpha \\ p[\alpha, \max(\{0\} \cup K_{s[\alpha]} \alpha)] + 1 & , \text{ sonst } . \end{cases}$$

Lemma 4

Für $\alpha \in C(\Lambda_0, 0)$ gilt:

- a) $\mu[\alpha] \in C(\Lambda_0, 0) \wedge s[\alpha] = S\mu[\alpha]$.
- b) $\mu[\alpha] = \min\{\eta \mid \alpha \in C(\alpha, \Theta \alpha \eta)\}$.
- c) $v < s[\alpha] \implies K_v^{(*)} s[\alpha] \subset K_v^{(*)} \alpha \wedge K_v^{(*)} \mu[\alpha] \subset K_v^{(*)} \alpha \cup K_v^{(*)} 1$.

Beweis:

zu a): Ist $\mu[\alpha] = p[\alpha, \max(\{0\} \cup K_{s[\alpha]} \alpha)] + 1$, so gilt nach §2, L3c und §3, L3c $S\mu[\alpha] = S\max(\{0\} \cup K_{s[\alpha]} \alpha) = s[\alpha]$.

b) Ist $s[\alpha] = 0 \wedge K_0 \alpha < \Theta \alpha$, so gilt $\alpha \in C(\alpha, \Theta \alpha)$ und $\mu[\alpha] = 0$.

Sei nun $s[\alpha] \neq 0 \vee \Theta \alpha \leq K_0 \alpha$: Aus L3c) folgt $\Theta \alpha \leq K_{s[\alpha]} \alpha$,

also nach Definition von $\mu[\alpha]$ und nach §2, L3b): $\mu[\alpha] = \beta + 1$ mit $\Theta\alpha\beta \leq K_s[\alpha] \alpha < \Theta\alpha(\beta+1)$. Daraus folgt mit §2, Satz 2 und §3, L3b) die Behauptung.

c) Sei $v < s[\alpha]$ und $\gamma := \max(\{0\} \cup K_{s[\alpha]} \alpha)$, also $\mu[\alpha] = p[\alpha, \gamma] + 1$ und $K_v^{(*)} \mu[\alpha] = K_v^{(*)} p[\alpha, \gamma] \cup K_v^{(*)} 1$. Wegen $s[\alpha] = S\mu[\alpha]$ ist nach §2, L2 $K_v^{(*)} s[\alpha] \subset K_v^{(*)} p[\alpha, \gamma]$. Aus §2, L3, Satz 1 folgt $K_v^{(*)} p[\alpha, \gamma] \subset K_v^{(*)} (K_{s[\alpha]} \alpha) \subset K_v^{(*)} \alpha$.

Definition einer Abbildung $\bar{\Theta}(\{g\}) \rightarrow C(\Lambda_0, 0)$, $a \mapsto \bar{a}$

1. $\bar{0} := 0$.
2. $\bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_n := \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_n$.
3. $\overline{(a, b)} := \begin{cases} \Theta\bar{a}(\mu[\bar{a}] + \beta + \iota\bar{a}\bar{b}) & , \text{ wenn } \bar{b} = s[\bar{a}] + \beta \\ \Theta\bar{a}\bar{b} & , \text{ wenn } \bar{b} < s[\bar{a}] \end{cases}$
Dabei sei $\iota\bar{a}\bar{b} := 1$, wenn $\bar{b} = \beta_0 + n$ mit $\mu[\bar{a}] < \beta_0 = \Theta\bar{a}\beta_0$,
andernfalls sei $\iota\bar{a}\bar{b} := 0$.
4. $\overline{[a, b]} := \begin{cases} g\bar{a}(\bar{b}+1) & , \text{ wenn } \bar{b} = \beta_0 + n \text{ mit } \beta_0 = g\bar{a}\beta_0 \\ g\bar{a}\bar{b} & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Folgerungen

- (1) $a \in \mathfrak{I} \implies \bar{a} \in C(\Lambda_0, 0)$.
- (2) $a \in \mathfrak{S} \implies \bar{a} \in B(0)$.
- (3) $a \in \mathfrak{K} \implies \bar{a} \in K$.
- (4) $(a, b) \in \mathfrak{I} \implies S\overline{(a, b)} = S\bar{b}$.
- (5) $[a, b] \in \mathfrak{I} \implies \overline{[a, b]} \stackrel{\text{NF}}{=} g\bar{a}(\bar{b}+1)$ mit $\iota \in \{0, 1\}$.

Lemma 5

- a) $(a, b) \in \mathfrak{I} \wedge \bar{b} = s[\bar{a}] + \beta \implies \overline{(a, b)} \stackrel{\text{NF}}{=} \Theta\bar{a}(\mu[\bar{a}] + \beta + \iota\bar{a}\bar{b})$.
- b) $(a, b) \in \mathfrak{I} \wedge s[\bar{a}] \leq \bar{b} \implies K_{S\bar{b}}^* \bar{a} < \bar{a} \wedge K_{S\bar{b}} \bar{a} \cup \{\bar{b}\} < \overline{(a, b)}$.

Beweis:

- a) Sei $\beta_1 := \mu[\bar{a}] + \beta + \iota\bar{a}\bar{b}$, also $\overline{(a, b)} = \Theta\bar{a}\beta_1$.
Ist $\mu[\bar{a}] + \beta = \Theta\bar{a}(\mu[\bar{a}] + \beta)$, so muss $\mu[\bar{a}] < \beta = \mu[\bar{a}] + \beta = \bar{b}$,
d.h. $\iota\bar{a}\bar{b} = 1$ sein. In jedem Fall ist daher $\beta_1 < \Theta\bar{a}\beta_1$.
Aus $\mu[\bar{a}] \leq \beta_1 \notin K$ folgt mit L4b) $\bar{a} \in C(\bar{a}, \Theta\bar{a}\beta_1)$.
b) folgt mit Folgerung (4) und §2, Satz 3a) aus a).

Lemma 6

Für $(a_1, b_1) \in \mathfrak{I}$ mit $s[\bar{a}_1] \leq \bar{b}_1 \wedge S\bar{b}_1 = S\beta_2 = v$ gilt:
 $\bar{a}_1 < \alpha_2 \wedge K_v \bar{a}_1 \cup \{\bar{b}_1\} < \Theta\alpha_2 \beta_2 \implies \overline{(a_1, b_1)} < \Theta\alpha_2 \beta_2$.

Beweis:

$$\bar{a}_1 < \alpha_2 \implies 1 < \Theta_{\alpha_2 \beta_2} \wedge \Theta_{\alpha_2 \beta_2} = \Theta_{\bar{a}_1 \eta_1}.$$

$$s[\bar{a}_1] \leq v = S\eta_1 \wedge K_{\bar{v}} \bar{a}_1 < \Theta_{\bar{a}_1 \eta_1} \text{ [mit L3b)] und §2, Satz 2]} \implies$$

$$\implies \bar{a}_1 \in C(\bar{a}_1, \Theta_{\bar{a}_1 \eta_1}) \text{ [mit L4b)]} \implies \mu[\bar{a}_1] \leq \eta_1 \implies$$

$$\text{[wegen } \neg \text{Lim} \mu[\bar{a}_1] \text{]} \implies \mu[\bar{a}_1] < \Theta_{\bar{a}_1 \eta_1} = \Theta_{\alpha_2 \beta_2}.$$

$$\text{Aus } \bar{a}_1 < \alpha_2 \wedge K_{\bar{v}} \bar{a}_1 \cup \{\mu[\bar{a}_1], \bar{b}_1, 1\} < \Theta_{\alpha_2 \beta_2} \text{ folgt mit L5a) und §2, Satz 3b) } (a_1, b_1) < \Theta_{\alpha_2 \beta_2}.$$

Abkürzung

$$A(1) : \langle == \rangle \quad \forall x, y \in \mathfrak{I} (2^{Lx} + 2^{Ly} < 1 \rightarrow (x < y \rightarrow \bar{x} < \bar{y})) .$$

Lemma 7

$$A(1) \wedge c = c_1 + \dots + c_n \in \mathfrak{I} \wedge n \geq 2 \wedge c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{S} \wedge 2^{Lc} < 1 \implies \\ \implies \bar{c} \not\equiv \bar{c}_1 + \dots + \bar{c}_n .$$

Beweis klar.

Lemma 8

$$A(1) \wedge 2^{Lc} < 1 \implies S\bar{c} = \overline{Sc} .$$

Beweis durch Induktion nach Lc mit L7 und Folg.(3), (4) .

Lemma 9

$$A(1) \wedge (a, b) \in \mathfrak{I} \wedge 2^{L(a, b)} < 1 \wedge \overline{K_{Sb}^* a} = K_{Sb}^* \bar{a} \implies s[\bar{a}] \leq \bar{b} .$$

Beweis:

$$\text{Sei } (a, b) \in \mathfrak{I} \wedge 2^{L(a, b)} < 1 .$$

$$A(1) \wedge 2^{Lb} < 2^{L(a, b)} \text{ [mit L8]} \implies \overline{Sb} = S\bar{b} .$$

$$A(1) \wedge \forall x \in K_{Sb}^* a (2^{Lx} + 2^{La} \leq 2 \cdot 2^{La} \leq 2^{L(a, b)}) \implies \overline{K_{Sb}^* a} < \bar{a} .$$

$$K_{Sb}^* \bar{a} < \bar{a} \text{ [mit L3b)]} \implies s[\bar{a}] \leq \bar{Sb} \leq \bar{b} .$$

Lemma 10

$$A(1) \wedge u \in \mathfrak{R}_0 \wedge c \in \mathfrak{I} \wedge 2^{Lu} + 2^{Lc} < 1 \implies$$

$$\implies \overline{K_u^* c} = K_u^* \bar{c} \wedge \overline{K_u c} \subset K_u \bar{c} \subset \{1\} \cup \overline{K_u c} .$$

Beweis durch Induktion nach Lc :

1. $c \in \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{S}$: Die Beh. folgt mit L7 aus der I.V.

2. $c \in \mathfrak{S} \wedge Sc \leq u$: Es ist $\overline{K_u^* c} = \emptyset$ und $\overline{K_u c} = \{\bar{c}\}$.

Aus $A(1) \wedge 2^{Lu} + 2^{Lc} < 1 \wedge Sc \leq u$ folgt $S\bar{c} = \overline{Sc} \leq \bar{u}$, also $K_u^* \bar{c} = \emptyset$ und $K_u \bar{c} = \{\bar{c}\}$.

3. $c = (a, b)$ $u < Sc$:

Es gilt $2^{LSb} + 2^{La} \leq 2^{Lc} < 1$, also nach I.V. $\overline{K_{Sb}^* a} = K_{Sb}^* \bar{a}$ und nach L5, L9 $\bar{c} \not\equiv \bar{a} \oplus \bar{b}$ mit $\bar{b} = s[\bar{a}] + \beta$ und $\beta \in \{0, 1\}$.

Aus $u < Sc$ folgt $\bar{u} < \bar{Sc}$. - Aus der Ind.vorauss. folgt

$$\overline{K_u^*c} = \{\bar{a}\} \cup K_u^* \bar{a} \cup K_u^* \bar{b} \wedge \overline{K_u c} \subset \gamma_u \bar{a} \cup K_u \bar{b} \subset \{1\} \cup \overline{K_u c}.$$

Fall 1: $s[\bar{a}] < \bar{b}$.

In diesem Falle ist $\mu[\bar{a}] + \beta = \bar{b}$, also $\overline{K_u^*c} = \{\bar{a}\} \cup K_u^* \bar{a} \cup K_u^* \bar{b}$ und $\overline{K_u c} = K_u \bar{a} \cup K_u \bar{b} \cup K_u \bar{c}$.

Fall 2: $s[\bar{a}] = \bar{b}$.

Dann ist $\bar{u} < s[\bar{a}]$, und mit L4c) folgt:

$$K_u^{(*)} \bar{a} \cup K_u^{(*)} \bar{b} \subset K_u^{(*)} \bar{a} \cup K_u^{(*)} (\mu[\bar{a}] + \beta + \iota) \subset K_u^{(*)} 1 \cup K_u^{(*)} \bar{a} \cup K_u^{(*)} \bar{b}.$$

4. $c = [a, b] \wedge u < c$:

Es ist $\bar{u} < \bar{c} \wedge \bar{u} \bar{c} \bar{g} \bar{a} (\bar{b} + \iota)$ mit $\iota \in \{0, 1\}$. Die Beh. folgt aus I.V.

Satz 3

$$c, d \in \mathfrak{I} \wedge c < d \quad \Rightarrow \quad \bar{c} < \bar{d}.$$

Beweis:

Man zeigt mit Hilfe von L5 - L10 und §1, Satz 12: $A(i) \Rightarrow A(i+1)$.

Daraus folgt durch Induktion nach i die Behauptung.

Satz 4

Zu jedem $\gamma \in C(\Lambda_0, 0)$ gibt es ein $c \in \mathfrak{I}$ mit $\bar{c} = \gamma$.

Beweis durch Induktion nach $L\gamma$:

1. $\gamma \bar{c} \bar{g} \gamma_1 + \dots + \gamma_n$:

I.V. $\Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{I}$ mit $\bar{c}_1 = \gamma_1, \dots, \bar{c}_n = \gamma_n$.

$\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \in B(0)$ [mit L7 und Satz 3] $\Rightarrow c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{I}$.

$\bar{c}_n \leq \dots \leq \bar{c}_1$ [mit Satz 3] $\Rightarrow c_n \leq \dots \leq c_1$.

Folglich gilt $c_1 + \dots + c_n \in \mathfrak{I}$ und $\gamma = \bar{c}_1 + \dots + \bar{c}_n$.

2. $\gamma \bar{c} \bar{g} \xi$:

I.V. $\Rightarrow \exists a \in \mathfrak{I}$ mit $\bar{a} = \xi$.

Sei $\iota_0 := \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } \eta = \eta_0 + n \text{ mit } \mu[\bar{a}] < \eta_0 = \bar{c} \bar{a} \eta_0 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$

$\gamma \bar{c} \bar{g} \bar{c} \bar{a} \eta$ [mit L4b)] $\Rightarrow \exists \beta$ mit $\eta = \mu[\bar{a}] + \beta + \iota_0$.

Offensichtlich ist $s[\bar{a}] + \beta \in C(\Lambda_0, 0)$ und $L(s[\bar{a}] + \beta) \leq L\eta < L\gamma$,

also gibt es nach I.V. ein $b \in \mathfrak{I}$ mit $\bar{b} = s[\bar{a}] + \beta$. Aus L3b)

folgt $K_{Sb}^* \bar{a} < \bar{a}$ und daraus mit Satz 3, L8, L10 $K_{Sb}^* a < a$,

d.h. $(a, b) \in \mathfrak{I}$. Nach Definition von $(\bar{a}, \bar{b})$ und ι_0 gilt

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{c} \bar{a} (\mu[\bar{a}] + \beta + \iota_0) = \gamma.$$

3. $\gamma \bar{c} \bar{g} \xi$: Die Behauptung folgt sofort aus I.V.

Aus Satz 3 und Satz 4 folgt, dass die Abbildung

$\bar{\Theta}(\{g\}) \rightarrow C(\Lambda_0, 0)$, $a \mapsto \bar{a}$ ein Ordnungsisomorphismus ist.

Mit §1, Satz 1e), Satz 5 und §3, L8 folgt ausserdem, dass die Stufe 0 von $\bar{\Theta}(\{g\})$ den Ordnungstyp $\Theta \Lambda_0$ hat.

§ 4 Vergleich der Ordinalzahlenmenge $C(\Omega_\omega, 0)$ mit den
 Bezeichnungssystemen $\Sigma(N)$, Σ von Schütte und Pfeiffer

Zur Durchführung des in der Überschrift angekündigten Vergleichs ist es zweckmässig, ein Bezeichnungssystem $\bar{\Theta}(\omega)$ einzuführen, das in gleicher Weise mit den bezgl. $\mathcal{G} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots\}$ definierten Funktionen $\bar{\Theta}\alpha$ zusammenhängt wie $\bar{\Theta}(\{g\})$ mit den bezgl. $\mathcal{G} = \{g\}$ definierten Funktionen $\Theta\alpha$.

Definition von $\bar{\Theta}(\omega)$

Mit Ausnahme der Regeln 1.5., 2.1., 3.5., 4.5. sei $\bar{\Theta}(\omega)$ durch dieselben Regeln 1.1. - 4.6. definiert wie $\bar{\Theta}(\{g\})$.

Die von der Definition auf Seite 22 abweichenden Definitionsregeln für $\bar{\Theta}(\omega)$ lauten:

- 1.5. $0 < i < \omega \implies \Omega_i \in \mathcal{R}$.
- 2.1. $\Omega_1 := 1$ für $0 \leq i < \omega$. (Es sei $\Omega_0 := 0$.)
3. Definition von $K_u^{(*)}a$ für $a \in \mathcal{R}$ und $0 \leq u < \omega$.
- 3.5. $K_u^* \Omega_1 := K_u \Omega_1 := \emptyset$, wenn $u < i$.
- 4.5. $0 < i < j < \omega \implies \Omega_i < \Omega_j$.

Die in §3 gewonnenen Ergebnisse lassen sich in naheliegender Weise auf das System $\bar{\Theta}(\omega)$ übertragen. Insbesondere ergibt sich so, dass $\bar{\Theta}(\omega)$ isomorph zur Ordinalzahlenmenge $C^{(\omega)}(\Omega_\omega, 0)$ ist, und dass die Stufe 0 von $\bar{\Theta}(\omega)$ den Ordnungstyp $\bar{\Theta}\Omega_\omega$ hat. Für den Isomorphismus $\bar{\Theta}(\omega) \mapsto C^{(\omega)}(\Omega_\omega, 0)$, $a \mapsto \bar{a}$ gilt:

$$\bar{\Omega}_1 = \Omega_1,$$

$$\overline{(a, b)} = \bar{\Theta}a(\mu[\bar{a}] + (-s[\bar{a}] + \bar{b}) + (\bar{a}\bar{b})).$$

Im folgenden werden wir beweisen, dass das System $\bar{\Theta}(\omega)$ isomorph zum Pfeifferschen Bezeichnungssystem Σ aus [8] ist. Darüber hinaus wird sich zeigen, dass der Isomorphismus von $\bar{\Theta}(\omega)$ auf Σ "stufentreu" ist. Da nach §1, Satz 15 $\bar{\Theta}\Omega_\omega = \bar{\Theta}\Omega_\omega$ und $C^{(\omega)}(\Omega_\omega, 0) = C(\Omega_\omega, 0) \cap \Omega_\omega$ ist, gilt somit:

1. Σ ist isomorph zu $C(\Omega_\omega, 0) \cap \Omega_\omega$.
2. $\{x \in \Sigma \mid Sx = 0\}$ hat den Ordnungstyp $\bar{\Theta}\Omega_\omega$.

Ein Hinweis auf den engen Zusammenhang zwischen den Bezeichnungssystemen $\bar{\Theta}(\omega)$ und Σ ist die Tatsache, dass $\bar{\Theta}(\omega)$ (abgesehen von einigen unwesentlichen formalen Details) genau wie Σ ein Teilsystem von $\bigcup_{N < \omega} \Sigma(N)$ ($\Sigma(N)$ aus [14]) ist.

Die folgende Definition von Σ ist - wie man leicht einsieht - im wesentlichen mit der in [8] gegebenen äquivalent.

Definition von Σ

Die Definitionsregeln für Σ seien bis auf Regel 1.4. dieselben wie für $\bar{\Theta}(\omega)$. Diese Regel laute für Σ :

$$1.4. a, b \in \mathfrak{X} \wedge Sa \leq Sb + 1 \implies (a, b) \in \mathfrak{X}.$$

I. Einbettung von Σ in $\bar{\Theta}(\omega)$

Lemma 1

$$(c, \Omega_m), a \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge n < m \wedge K_n^* a < c \implies K_m a < (c, \Omega_m).$$

Beweis durch Induktion nach La :

Sei $a = (a_1, a_2) \wedge m \leq Sa$. (Die anderen Fälle sind trivial.)

$$n < m \implies \{a_1\} \cup K_n^* a_1 \cup K_n^* a_2 = K_n^* a < c \text{ [mit I.V.] } \implies$$

$$\implies K_m a_1 \cup K_m a_2 < (c, \Omega_m).$$

$$\text{Für } m < Sa \text{ ist } K_m a = K_m a_1 \cup K_m a_2 < (c, \Omega_m).$$

$$\text{Für } m = Sa \text{ gilt: } a_1 < c \wedge K_m a_1 \cup K_m a_2 < (c, \Omega_m) \implies K_m a = \{a\} < (c, \Omega_m).$$

Lemma 2

$$(a_1, b), (a_2, b) \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge n < m = Sb \wedge \{a_1\} \cup K_n^* a_1 < a_2 \implies$$

$$\implies (a_1, b) < (a_2, b).$$

Beweis mit L1 und §3, L2.

Lemma 3

$$a, c \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge K_n^* c < c \wedge a < (c, \Omega_{n+1}) \implies K_n^* a < c.$$

Beweis durch Induktion nach La :

Sei $a = (a_1, a_2) \wedge n < Sa$. (Die anderen Fälle sind trivial.)

Wegen $a < (c, \Omega_{n+1})$ muss $Sa = n+1$ sein.

$$\text{Es ist } K_n^* a = \{a_1\} \cup K_n^* a_1 \cup K_n^* a_2 \text{ und } K_n^* a_1 = K_{n+1}^* a_1 \cup K_n^* (K_{n+1} a_1).$$

Wäre $c \leq a_1$, so müsste nach L2 $(c, \Omega_{n+1}) \leq a$ sein.

$$\text{Folglich ist } a_1 < c \wedge K_{n+1} a_1 \cup \{a_2\} < (c, \Omega_{n+1}).$$

$$\text{Wegen } a \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge Sa = n+1 \text{ ist } K_{n+1}^* a_1 < a_1 < c.$$

$$\text{Aus I.V. folgt } K_n^* (K_{n+1} a_1) \cup K_n^* a_2 < c.$$

Definition

$$\Omega_1^{(0)} := \Omega_1$$

$$\Omega_1^{(k+1)} := (\Omega_1^{(k)}, \Omega_1)$$

Lemma 4

- a) $\Omega_i^{(k)} \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge S\Omega_i^{(k)} = 1$.
 b) $k < m \implies \Omega_i^{(k)} < \Omega_i^{(m)}$.
 c) $K_m^* \Omega_i^{(k)} < \Omega_i^{(k)} \wedge (m < i \rightarrow K_m \Omega_i^{(k)} = \emptyset)$.
 d) $(\Omega_i^{(k)}, \Omega_m) < (\Omega_i^{(k+1)}, \Omega_m) < (\Omega_{i+1}, \Omega_m)$.

Beweis:

a), b), c) durch Induktion nach k .

d) mit a), b), c) und Fallunterscheidung nach $m \leq i$.

Lemma 5

Sei $a \in \bar{\Theta}(\omega)$:

- a) $Sa \leq m \implies \exists i \text{ mit } a < (\Omega_{i+1}, \Omega_m)$.
 b) $m \leq i \wedge \{a\} \cup K_m^* a < \Omega_{i+1} \wedge K_m a < (\Omega_{i+1}, \Omega_m) \implies$
 $\implies \exists k \text{ mit } a < \Omega_i^{(k)} \wedge K_m a < (\Omega_i^{(k)}, \Omega_m)$.
 c) $m \leq i \wedge a < (\Omega_{i+1}, \Omega_m) \implies \exists k \text{ mit } a < (\Omega_i^{(k)}, \Omega_m)$.

Beweis von a) und b) durch Induktion nach La :

a) klar . c) folgt aus b) .

b) Sei $a = (a_1, a_2) \wedge m \leq Sa$. (Die anderen Fälle sind trivial.)

1. $Sa = m$;

$a \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge m \leq i \wedge a < (\Omega_{i+1}, \Omega_m) \implies K_m^* a_1 < a_1 \wedge a_1, a_2 < \Omega_{i+1} \wedge$
 $\wedge K_m a_1 \cup \{a_2\} < (\Omega_{i+1}, \Omega_m)$ [mit I.V.] $\implies$

$\exists k \text{ mit } a_1 < \Omega_i^{(k)} \wedge K_m a_1 \cup \{a_2\} < (\Omega_i^{(k)}, \Omega_m) \implies$

$\exists k \text{ mit } K_m a = \{a\} < (\Omega_i^{(k)}, \Omega_m) < \Omega_i^{(k+1)}$.

2. $Sa > m$:

Es gilt $a_2 < a < \Omega_{i+1} \wedge \{a_1\} \cup K_m^* a_1 \cup K_m^* a_2 = K_m^* a < \Omega_{i+1} \wedge$
 $K_m a_1 \cup K_m a_2 = K_m a < (\Omega_{i+1}, \Omega_m)$.

Da $K_m^{(*)}(K_i a_1) \subset K_m^{(*)} a_1$ ist (siehe §3, Satz 2d) , gibt es also nach I.V. ein k mit

$a_1 < \Omega_i^{(k)} \wedge K_i a_1 \cup \{a_2\} < \Omega_i^{(k+1)} \wedge K_m a_1 \cup K_m a_2 < (\Omega_i^{(k+1)}, \Omega_m)$.

Daraus folgt $a < \Omega_i^{(k+1)} \wedge K_m a < (\Omega_i^{(k+1)}, \Omega_m)$.

Lemma 6

$a \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge (\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \leq a < \Omega_{n+2} \implies \exists i \geq n+2 \exists k > 0 \text{ mit}$

$(\Omega_i^{(k-1)}, \Omega_{n+1}) \leq a < (\Omega_i^{(k)}, \Omega_{n+1})$.

Man beweist Lemma 6 mit Hilfe von Lemma 4 und 5 .

Definition von $h_{n+1}a$ für $a \in \bar{\Theta}(\omega)$ mit $sa \leq n+1$

$$h_{n+1}a := \begin{cases} a & , \text{ wenn } a < (\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \\ \Omega_i & , \text{ wenn } a = (\Omega_i, \Omega_{n+1}) \text{ mit } i > n+1 \\ \Omega_i^{(k)} + a & , \text{ wenn } (\Omega_i^{(k-1)}, \Omega_{n+1}) < a \leq (\Omega_i^{(k)}, \Omega_{n+1}) \\ & \text{mit } i > n+1 \text{ und } k > 0 . \end{cases}$$

Lemma 7

- a) $a \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge sa \leq n+1 \implies h_{n+1}a \in \bar{\Theta}(\omega)$
 $K_n^*(h_{n+1}a) < h_{n+1}a$
 $K_m(h_{n+1}a) = K_m a$, falls $m \leq n$.
- b) $a_1, a_2 \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge a_1 < a_2 < \Omega_{n+2} \implies h_{n+1}a_1 < h_{n+1}a_2$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{zu a): } a &= (\Omega_i^{(k)}, \Omega_{n+1}) \text{ [mit L4c)]} \implies K_n^*(\Omega_i^{(k)} + a) < \Omega_i^{(k)} + a . \\ a &< (\Omega_i^{(k)}, \Omega_{n+1}) \text{ [mit L4c) und L3]} \implies K_n^*(\Omega_i^{(k)} + a) < \Omega_i^{(k)} . \\ \Omega_{n+1} &\leq a < (\Omega_{n+1}, \Omega_{n+1}) \text{ [mit L3]} \implies K_n^*a < \Omega_{n+1} \leq a . \\ (\Omega_{n+1}, \Omega_{n+1}) &\leq a < (\Omega_{n+2}, \Omega_{n+1}) \text{ [mit L5c)]} \implies \\ \implies \exists k > 0 \text{ mit } (\Omega_{n+1}^{(k-1)}, \Omega_{n+1}) &\leq a < (\Omega_{n+1}^{(k)}, \Omega_{n+1}) \implies \\ \text{[mit L3]} \implies \exists k > 0 \text{ mit } K_n^*a &< \Omega_{n+1}^{(k)} \leq a . \end{aligned}$$

Definition

Sind $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) Hauptterme aus Σ (bzw. aus $\Theta(\omega)$) ,
 und ist $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ eine Permutation von $(1, \dots, n)$ mit
 $a_{\pi(n)} \leq \dots \leq a_{\pi(1)}$, so sei

$$a_1 \# \dots \# a_n := a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(n)} .$$

Definition einer Abbildung $\Sigma \rightarrow \bar{\Theta}(\omega)$, $a \mapsto \bar{a}$

- $\bar{\Omega}_i := \Omega_i$, für $0 \leq i < \omega$. ($\Omega_0 = 0$)
- $\overline{a_1 + \dots + a_n} := \bar{a}_1 \# \dots \# \bar{a}_n$.
- $\overline{(a, b)} := (h_{sb+1}\bar{a}, \bar{b})$.

Lemma 8

$$a \in \Sigma \implies \bar{a} \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge s\bar{a} = sa \wedge K_n \bar{a} = \overline{K_n a} .$$

Beweis mit Lemma 7a) .

Satz 1

$$a, b \in \Sigma \wedge a < b \quad ==> \quad \bar{a}, \bar{b} \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge \bar{a} < \bar{b} .$$

Beweis durch Induktion nach $La + Lb$ mit Lemma 7 und Lemma 8.

II. Einbettung von $\bar{\Theta}(\omega)$ in Σ Definition

$$\text{Für } a \in \Sigma \text{ sei } D_m a := \begin{cases} a & , \text{ wenn } Sa \leq m \\ (D_{m+1} a, \Omega_m) & , \text{ wenn } m < Sa \end{cases} .$$

Lemma 9

$$a \in \Sigma \quad ==> \quad D_m a \in \Sigma \wedge SD_m a = \min\{Sa, m\} \wedge (n < m \rightarrow K_n D_m a = K_n a) .$$

Beweis klar.

Lemma 10

$$a_1, a_2 \in \Sigma \wedge a_1 < a_2 \wedge \forall i (m \leq i \leq Sa_1 \rightarrow K_i a_1 < D_i a_2) \quad ==> \quad D_m a_1 < D_m a_2 .$$

Beweis durch Induktion nach $Sa_1 - m$:

1. $Sa_1 < m$: $D_m a_1 = a_1 < D_m a_2$.
2. $Sa_2 = m$: $D_m a_1 = a_1 < a_2 = D_m a_2$.
3. $m = Sa_1 < Sa_2$: $K_m a_1 < D_m a_2 = (D_{m+1} a_2, \Omega_m) \quad ==> \quad D_m a_1 = a_1 < D_m a_2$.
4. $m < Sa_1 \leq Sa_2$: $D_m a_k = (D_{m+1} a_k, \Omega_m)$, ($k=1, 2$).
- I.V. $\wedge L9 \quad ==> \quad D_{m+1} a_1 < D_{m+1} a_2 \wedge K_m (D_{m+1} a_1) \cup \{\Omega_m\} < D_m a_2$.
- $\quad ==> \quad (D_{m+1} a_1, \Omega_m) < (D_{m+1} a_2, \Omega_m)$.

Definition einer Abbildung $\bar{\Theta}(\omega) \rightarrow \Sigma, a \mapsto \bar{a}$

1. $\bar{\Omega}_i := \Omega_i$, für $0 \leq i < \omega$.
2. $\bar{a_1 + \dots + a_n} := \bar{a_1} \# \dots \# \bar{a_n}$.
3. $\bar{(a, b)} := (D_{Sb+1} \bar{a}, \bar{b})$.

Lemma 11

$$a \in \bar{\Theta}(\omega) \quad ==> \quad \bar{a} \in \Sigma \wedge S\bar{a} = Sa \wedge K_n \bar{a} = \widetilde{K_n a} .$$

Beweis mit Lemma 9.

Lemma 12

$$\left. \begin{aligned} & a_1, a_2 \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge \{a_1\} \cup K_n^* a_1 < a_2 \wedge \\ & \forall x \in \bar{\Theta}(\omega) (Lx \leq La_1 \wedge x < a_2 \rightarrow \bar{x} < \bar{a_2}) \end{aligned} \right\} ==> \quad D_{n+1} \bar{a_1} < D_{n+1} \bar{a_2} .$$

Beweis:

Aus der Voraussetzung folgt $\bar{a_1} < \bar{a_2}$. Nach L10 genügt es, die

folgende Behauptung zu beweisen: $\forall i (n+1 \leq i \rightarrow K_1 \tilde{a}_i < D_1 \tilde{a}_i)$.

Beweis durch Induktion nach La_1 : Sei $n+1 \leq m$.

$$1. Sa_2 \leq m : \tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 \implies K_m \tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 = D_m \tilde{a}_2 .$$

$$2. Sa_1 < m < Sa_2 : K_m \tilde{a}_1 < \Omega_m < D_m \tilde{a}_2 .$$

$$3. m \leq Sa_1 \wedge m < Sa_2 :$$

$$3.1. a_1 = \Omega_j : K_m \tilde{a}_1 \subset \{\Omega_m\} < D_m \tilde{a}_2 .$$

$$3.2. a_1 = (c, d) :$$

$$n < m \leq Sa_1 \implies d < a_1 < a_2 \wedge \{c\} \cup K_n^* c \cup K_n^* d = K_n^* a_1 < a_2 \implies$$

$$[\text{mit I.V.}] \implies \forall i (n+1 \leq i \rightarrow K_1 \tilde{c} \cup K_1 \tilde{d} < D_1 \tilde{a}_2) \implies$$

$$[\text{mit L10 u. } n+1 \leq m] \implies D_{m+1} \tilde{c} < D_{m+1} \tilde{a}_2 \wedge K_m \tilde{c} \cup K_m \tilde{d} < D_m \tilde{a}_2 .$$

$$3.2.1. Sa_1 = m :$$

Mit L9 und $m < Sa_2$ folgt $K_m D_{m+1} \tilde{c} \cup \{\tilde{d}\} < D_m \tilde{a}_2$. Also gilt

$$D_m \tilde{a}_1 = \tilde{a}_1 = (D_{m+1} \tilde{c}, \tilde{d}) < (D_{m+1} \tilde{a}_2, \Omega_m) = D_m \tilde{a}_2 .$$

$$3.2.2. m < Sa_1 :$$

Aus L11 folgt $K_m \tilde{a}_1 = K_m \tilde{c} \cup K_m \tilde{d} < D_m \tilde{a}_2$.

$$3.3. a_1 \text{ kein Hauptterm: klar .}$$

Satz 2

$$a, b \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge a < b \implies \tilde{a}, \tilde{b} \in \Sigma \wedge \tilde{a} < \tilde{b} .$$

Beweis durch Induktion nach $La + Lb$ mit Hilfe der Lemmata 9 - 12 .

Lemma 13

Für $n < m$ gilt: $D_n \Omega_m \in \Sigma \wedge \overline{D_n \Omega_m} = (\Omega_m, \Omega_n)$

$$(\Omega_m, \Omega_n) \in \bar{\Theta}(\omega) \wedge \widehat{(\Omega_m, \Omega_n)} = D_n \Omega_m .$$

Ist M eine wohlgeordnete Menge, so sei $\|M\|$ ihr Ordnungstyp .

Aus Satz 1, Satz 2 und Lemma 13 folgt:

$$1. \|\Sigma\| = \|\bar{\Theta}(\omega)\| .$$

$$2. \|\{x \in \Sigma \mid Sx = n\}\| = \|\{x \in \bar{\Theta}(\omega) \mid Sx = n\}\| .$$

$$3. \|\{x \in \Sigma \mid x < D_n \Omega_m\}\| = \|\{x \in \bar{\Theta}(\omega) \mid x < (\Omega_m, \Omega_n)\}\| , \quad (0 \leq n < m) .$$

Da der Isomorphismus von $\bar{\Theta}(\omega)$ auf $C(\Omega_\omega, 0) \cap \Omega_\omega$ dem Term $(\Omega_{n+1}, 0)$ die Ordinalzahl $\mathfrak{O}_{n+1}^0$ zuordnet, gilt ferner

$$\|\{x \in \Sigma \mid x < D_0 \Omega_{n+1}\}\| = \|\{x \in \bar{\Theta}(\omega) \mid x < (\Omega_{n+1}, 0)\}\| = \mathfrak{O}_{n+1}^0 .$$

Schliesslich sei noch auf die folgende Beziehung hingewiesen:

$$1. \{x \in \bar{\Theta}(\omega) \mid x < (\Omega_{n+1}, 0)\} = \{x \in \bar{\Theta}(n+1) \mid Sx = 0\} .$$

$$2. \{x \in \Sigma \mid x < D_0 \Omega_{n+1}\} = \{x \in \Sigma(n) \mid x < D_0 \Omega_{n+1}\} = \{x \in \Sigma \cap \Sigma(n) \mid Sx = 0\} .$$

$(\bar{\Theta}(n+1))$ ist wie $\bar{\Theta}(\omega)$ definiert, nur dass für $\bar{\Theta}(n+1)$ gilt

$$R = \{\Omega_1, \dots, \Omega_n\} .$$

Literaturverzeichnis

- [1] Aczel A new approach to the Bachmann method for describing large countable ordinals. (unveröffentlicht).
- [2] Bachmann Transfinite Zahlen. Springer, Berlin (1967) .
- [2a] Bachmann Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich 95 (1950) .
- [3] Bridge Some problems in mathematical logic. Systems of ordinal functions and ordinal notations. Dissertation, Oxford (1972) .
- [4] Isles Regular ordinals and normal forms. Intuitionism and Proof Theory S. 339, North Holland (1970) .
- [5] Kino On ordinal diagrams. Jour.Math.Soc.Jap. 13 , S. 346 (1961) .
- [6] Levitz u. A characterization of Takeuti's ordinal diagrams of finite order. Archiv f. math. Logik u. Grundlagenforschung 14 (1974) .
- [7] Pfeiffer Ausgezeichnete Folgen für gewisse Abschnitte der zweiten und weiterer Zahlenklassen. Dissertation, Hannover (1964) .
- [8] Pfeiffer Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen. Arch.Math.Log.u.Grundl. 12 (1969) .
- [9] Pfeiffer Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen. Arch.Math.Log.u.Grundl. 13 (1970) .
- [10] Pfeiffer Vergleich zweier Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen. Arch.Math.Log.u.Grundl. 15 (1972)
- [11] Pfeiffer Über zwei Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen. Arch.Math.Log.u.Grundl. 16 (1973)
- [12] Pfeiffer Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen. Communications of the Mathematical Institute Rijksuniversiteit Utrecht 1973 - 1 .
- [13] Schütte Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen. Math.Ann. 127 (1954)

- [14] Schütte Ein konstruktives System von Ordinalzahlen.
Arch.Math.Log.u.Grundl. 11 (1968) u. 12 (1969)
- [15] Schütte Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen
(nach einem Ansatz von P. Aczel).
(unveröffentlicht).
- [16] Takeuti Ordinal diagrams I, II. Journ.Math.Soc.Jap.
9 (1957) und 12 (1960) .

Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole

$\bar{a}$	25, 31	$\mu[\gamma, \alpha, \beta]$	8
$\tilde{a}$	32	$\mu[\alpha]$	24
α^+	1	$\gamma_{NF} \dots$	3, 6, 7
$a_1 \# \dots \# a_n$	31	$NF(\gamma)$	13, 20
$B(\alpha)$	1	ν_o	11
$C(\alpha, \beta)$	1	ν	11
$\overset{1}{C}(\alpha, \beta)$	10	ON	1
$\overset{(T)}{C}(\alpha, \beta)$	10	Ω_α	1
$D_m a$	32	$\Omega_1^{(k)}$	29
ℓ_j^c	1	$p[\alpha, \gamma]$	14
G^*	7	$q[\alpha, \gamma]$	15
$G\beta$	7	$S\alpha$	1
$g\alpha\beta$	7	Sa	21, 22
$h_{n+1} a$	31	$s[\alpha, \gamma]$	24
$\emptyset$	21, 22	$s[\alpha]$	24
K	1	Σ	29
K_o	1	$\Theta\alpha\beta$	1
R, R_o	21, 22	$\overset{1}{\Theta}\alpha\beta$	10
$K_\kappa^* \gamma$	11	$\overset{(T)}{\Theta}\alpha\beta$	10
$K_\kappa \gamma$	11	$\bar{\Theta}(\{g\})$	21, 22
$\mathbb{K}_\kappa \gamma$	15	$\bar{\Theta}(\omega)$	28
$K_u^* a$	21, 22	T	11, 20
$K_u a$	21, 22	$\mathfrak{z}$	21, 22
κ	11		
$L\gamma$	11		
La	23		
Λ_α	7		

Lebenslauf

=====

Ich wurde am 1. April 1948 als Sohn des Dipl. Ing. Wolfgang Buchholz und seiner Ehefrau Anneliese, geborene Voigt, in Berlin-Spandau geboren. Im April 1954 begann ich mit dem Besuch der dortigen Grundschule. Im Dezember 1955 zogen wir nach München um, und ich wechselte an die Flurschule II, Abteilung Gebeleschule, in München über. Ab September 1958 besuchte ich die Luitpold-Oberrealschule München (jetzt Luitpold-Gymnasium), wo ich im Juli 1967 die Reifeprüfung ablegte. Im Herbst 1967 begann ich mit dem Studium der Mathematik an der Universität München, das ich am 23. Oktober 1972 mit der Diplomprüfung abschloss. Seit dem 1. November 1972 bin ich am Mathematischen Institut der Universität München als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten beschäftigt.





